1 Dalle origini al XIX secolo

Dalla mancanza di distinzione fra filosofia della natura e scienze della natura nel pensiero classico, alla nascita delle scienze moderne nei secc. XVI–XVII, all'eclissi della filosofia della natura nei secc. XVII–XIX, alla crisi dei fondamenti della matematica moderna nella seconda metà del XIX secolo.

Lista degli acronimi

AC	Axiom of Choice (Assioma di Scelta)
BAO	Boolean Algebra with Operators (Alg. Booleana con Operatori)
b.o.	Buon ordinamento di insiemi
FOL	First Order Logic (Logica del Primo Ordine)
GR	General Relativity (Teoria della Relatività Generale).
N	Von Neumann (Teoria degli Insiemi di)
NBG	Von Neumann-Bernays-Gödel (Teoria degli Insiemi di)
NWF	Non-wellfounded sets (Insiemi Non-benfondati)
QFT	Quantum Field Theory (Teoria Quantistica dei Campi)
QM	Quantum Mechanics (Meccanica Quantistica)
RGL	Raddoppio dei Gradi di Libertà
RSE	Realismo Strutturale Epistemico (Epistemic Structural Realism)
RSO	Realismo Strutturale Ontico (Ontic Structural Realism)
SR	Special Relativity (Teoria della Relatività Speciale).
TC	Teoria delle Categorie
TCS	Theoretical Computer Science (Informatica Teorica)
TI	Teoria degli Insiemi

Z Zermelo (Teoria degli insiemi di)

ZF Zermelo-Fraenkel (Teoria degli insiemi di)

ZFC ZF + Choice Axiom (ZF con l'Assioma di Scelta)

1.1 Filosofia della natura e scienza moderna: le origini

ICONE

- Importante
- Definizione
- Sommario
- Glossario
- Bibliografia

Non è facile oggi scrivere un manuale di *filosofia della natura* che pretenda, come il presente, di essere anche un manuale di *filosofia della scienza*. La difficoltà deriva da tutta una serie di motivazioni storiche e teoretiche insieme che per essere adeguatamente illustrate e spiegate richiederebbero da sole non uno, ma più volumi, per di più d'indole specialistica e quindi di non facile lettura.

Dovendoci per forza di cose limitare, possiamo sintetizzare dicendo che, nell'antichità classica e medievale della nostra cultura occidentale, la *physica* o *philosophia naturalis* includeva nel suo oggetto di studio non solo l'oggetto teoretico di studio di ciò che oggi definiamo col termine di *filosofia della natura*, ma anche l'oggetto sperimentale di studio di quello sterminato e sempre più articolato insieme di discipline scientifiche che nella modernità definiamo col termine di *scienze naturali,* le *scienze biologiche, psicologiche e sociali,* incluse[1].

La filosofia della natura ha cominciato a distinguersi dalle scienze naturali solo nella modernità, la cui origine viene infatti a coincidere con la nascita nel XVI e nel XVII secolo delle scienze naturali, appunto «moderne», la fisica galileiano - newtoniana innanzitutto. Tali scienze vengono progressivamente a caratterizzarsi infatti per un loro specifico *oggetto* (fenomenico) e per un loro specifico *metodo di indagine* (sperimentale) e di *dimostrazione* (dapprima *incondizionato* o «apodittico-deduttivo», quindi, dal XIX secolo in poi, *ipotetico-deduttivo*), nonché per un loro specifico *linguaggio formale** (matematico), completamente distinto dall'oggetto, dal metodo e dal linguaggio dell'antica metafisica e dell'antica filosofia naturale. Definiremo in seguito (cfr. **Capitolo 4**) la nozione di filosofia della natura come parte dell'ontologia e finalmente della metafisica, per renderci conto, più approfonditamente, del senso generale di queste affermazioni.

---

[1] Come appare dalla *legenda* di simboli a fianco del testo, ci serviremo d'icone per evidenziare diverse parti dell'esposizione, in modo da facilitarne la lettura e l'apprendimento selettivi da parte del lettore.

L'origine della scienza fisica e matematica nell'Antica Grecia

D'altra parte, l'affermarsi della scienza moderna e del suo metodo matematico d'indagine e di dimostrazione ha decretato la vittoria della filosofia della natura d'ispirazione *platonica* rispetto a quella d'ispirazione aristotelica del tardo medioevo. Sappiamo come la dottrina di Pitagora (VI sec. a.C.), che faceva degli enti matematici l'essenza della realtà fisica, fosse stata ripresa da Platone (IV sec. a.C.), sviluppata dall'eccezionale lavoro assiomatico di Euclide di Alessandria (III sec. a.C.) e quindi applicata sistematicamente per lo studio delle realtà fisiche e delle loro leggi da Archimede di Siracusa (III sec. a.C.).

Progressiva separazione fra metafisica, matematica, fisica e la nascita della logica in Aristotele…

Nella stessa grecità, però, quest'impostazione pitagorico–platonica subì i suoi primi radicali ridimensionamenti. Innanzitutto, la critica di Aristotele (IV sec.) alle inconsistenze formali del sistema platonico (teoria dei numeri e delle idee) e della sua dottrina della «partecipazione formale» portò allo sviluppo autonomo dalla matematica del sistema metafisico aristotelico. Esso misconosceva alle scienze matematiche un carattere fondativo rispetto alle scienze naturali e, allo stesso tempo, riconoscendo all'ente logico-matematico (= universale) una realtà unicamente mentale, astratta, legava l'indagine filosofica sull'essere – quella che dopo Aristotele si definirà «metafisica» – direttamente alle scienze fisiche e non a quelle matematiche, com'era invece nella tradizione pitagorico–platonica. Di qui la prima sistematizzazione della logica formale – ed in essa della *teoria della dimostrazione* e del *metodo deduttivo* della *sillogistica* – operata da Aristotele, basata sulle proposizioni del linguaggio ordinario e non su quelle, molto più rigorose, del linguaggio matematico, come invece farà, per esempio, Euclide nei suoi *Elementi*.

… ed in Euclide

D'altra parte, con l'opera di questo illustre matematico alessandrino, la matematica consuma, per altra via complementare a quella aristotelica, la sua separazione dalla metafisica. Non solo l'aritmetica – come già lo era per Pitagora –, ma la stessa geometria diviene con Euclide una scienza puramente formale, deduttiva, svincolata da ogni legame con la realtà, di cui cessa di essere una rappresentazione ideale.

Il primo shock della matematica greca e il suo superamento mediante il principio di esaustione

L'uso del metodo empirico nelle matematiche ed in particolar modo nelle geometrie torna in auge con Archimede, ma come *metodo euristico* per la scoperta di nuovi teoremi, di cui fornire in un secondo tempo una dimostrazione formale, generalmente *per assurdo* come nei *Dialoghi* platonici. Ed è precisamente in questo modo che il programma pitagorico–platonico incontrò l'ostacolo più grave ad una generalizzazione della rappresentazione geometrica della realtà fisica, empiricamente accertabile.

Sappiamo come il geniale scienziato di Siracusa, fra i contributi maggiori che diede alla matematica, fu il calcolo del volume della sfera, del cilindro, la quadratura del segmento parabolico, nonché dello stesso valore di

π mediante l'applicazione come metodo di calcolo del *principio di esaustione** inventato da un altro geniale discepolo di Platone, Eudosso di Cnido (IV sec.), forse il più grande matematico dell'antichità greca. Questi, infatti, grazie al suo principio, aveva reso possibile alla matematica greca di superare il primo grande shock della sua storia: *la scoperta degli incommensurabili*. La scoperta cioè che non esistevano solo i numeri naturali e razionali a coda decimale *finita* (e/o *periodica*), che nascevano come rapporti fra grandezze geometriche *commensurabili*, ma anche i *numeri irrazionali* a coda decimale *infinita/aperiodica* che nascevano come rapporti fra grandezze incommensurabili (p.es., $\sqrt{2}$ come rapporto fra il lato di un quadrato e la sua diagonale).

La dimostrazione di Eudosso come dimostrazione per assurdo

Una scoperta che aveva posto in crisi d'un sol colpo la visione pitagorica del numero come *rapporto finito* e quindi della matematica come scienza dell'armonia e dell'assoluta, perfetta *staticità*. La genialità di Eudosso fu quella di aver insegnato ai Greci a non aver paura dell'infinito — e i numeri irrazionali si caratterizzano proprio per l'estensione infinita della loro «coda» decimale — purché si rappresentino i numeri non come le statiche armonie pitagoriche, ma come *grandezze che variano* e possono quindi approssimare valori esatti, proprio come, nella rappresentazione classica del metodo delle esaustioni (cfr. Figura 1-1), moltiplicando all'infinito i lati di un poligono essi *non potranno non coincidere* — si tratta dunque di una dimostrazione per assurdo —con la circonferenza in cui il poligono è iscritto. Archimede, dunque — anche perché di Eudosso non c'è rimasto quasi nulla di scritto —, fu colui che mostrò la fecondità del principio scoperto dal suo illustre predecessore nell'Accademia platonica, come metodo di calcolo di aree, superfici e rapporti «incommensurabili» quali appunto quelli fra una circonferenza e il suo diametro (il famoso valore di π).

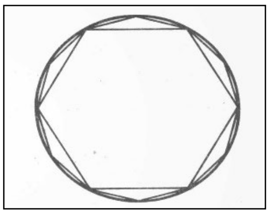

Figura 1-1. Illustrazione intuitiva del *principio di esaustione*. Aumentando all'infinito i lati del poligono inscritto esso non potrà non coincidere con la circonferenza.

Il secondo shock non superato dalla matematica greca: il problema della quadratura delle curve

Ma proprio quando si trattò di generalizzare questo metodo di calcolo, Archimede s'imbatté nel cosiddetto problema della *quadratura delle curve*, nel problema del calcolo, cioè, mediante l'opportuna equazione numerica associata, dell'area sottostante ad una curva di qualsiasi forma. Come sappiamo, infatti (cfr. **Introduzione**) la matematica greca, come attestato da Archimede stesso, era in grado di calcolare l'equazione dell'area sottesa alle sole *curve coniche*. Il metodo di Eudosso delle esaustioni suggeriva però la possibilità di calcolare mediante i numeri infinitesimi l'area sottesa di una curva mediante quella sottesa a una *curva poligonale* (a lati rettilinei), ovvero di «quadrare una curva».

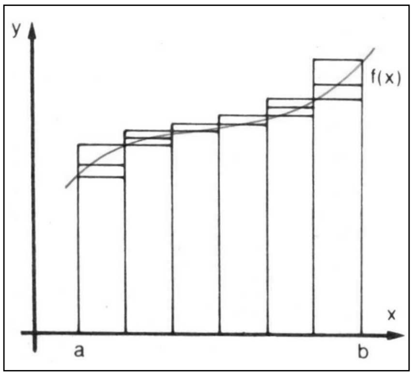

Figura 1-2. Rappresentazione moderna del problema del calcolo dell'area sottesa ad una curva (=«quadratura di una curva») mediante il calcolo dell'integrale definito in un determinato intervallo di quella curva. Ovvero, della *rappresentazione funzionale* $y = f(x)$ su un *grafico cartesiano* bidimensionale del polinomio algebrico che definisce l'equazione dell'area della curva in questione. Come si intuisce, «stringendo» sempre di più il lato $a\_1, a\_2, \ldots, a\_(b-1,)$ b dei «rettangolini» che seguono le *variazioni* di livello della curva (ovvero l'andamento della variabile *y* rispetto ad *x* secondo la legge algebrica *f*), le diagonali dei rettangolini in questione coincidono con la *tangente* della curva in questione in quel dato intervallo. Quindi restringendo indefinitamente i rettangolini possiamo arrivare a definire la tangente per un *punto* con coordinate *xy* e, quindi, grazie alle diverse inclinazioni delle tangenti, ricostruire la forma integrale completa o continua della curva.

La sua soluzione solo nell'età moderna mediante l'invenzione del calcolo reso possibile dall'algebrizzazione della geometria

Ma per scoprire un metodo effettivo di calcolo che generalizzasse a qualsiasi curva il metodo di Eudosso come Archimede intuì, bisognerà aspettare Newton e Leibniz, ovvero il XVII secolo, attraverso il *metodo della tangente* (derivata della curva in un dato punto) e dunque l'invenzione del *calcolo infinitesimale* (vedi Figura 1-2). Un'invenzione però che supponeva *l'algebrizzazione della geometria* e dunque dell'intera matematica (non solo dell'aritmetica) e la *simbolizzazione del calcolo algebrico.* Un risultato che sarà ottenuto, almeno nella sua forma iniziale da Descartes, perfezionato da Riemann, per giungere al suo apice oggi con la TC che completa questo *programma di ricerca* – che allora è il vero «punto di svolta» fra scienza classica e moderna.

L'algebrizzazione della matematica fino alla TC punto di svolta fra matematica classica e moderna

Infatti, come sappiamo dall'**Introduzione** di questo volume, la TC fa *dell'algebra delle relazioni* e dunque dell'*algebra degli operatori* il metalinguaggio proprio – il metalinguaggio delle «frecce» invece che dello «epsilon» della TI e dunque, platonicamente, della logica dei predicati – di tutta la matematica e la logica, pure ed applicate.

L'«età di mezzo» fra il problema del calcolo e la sua soluzione circoscrive il Medio Evo come «i secoli bui»

D'altra parte, il fatto che per la soluzione del problema della quadratura delle curve su cui si blocca la fisica-matematica greca bisogna aspettare l'età moderna, idealmente circoscrive «l'età di mezzo» o *Medio Evo* fra le due «parentesi» del problema e della sua soluzione facendone nel contempo, secondo l'ideologia illuminista «l'età dell'oscuramento della ragione scientifica» dominata dalla metafisica e dalla teologia.

L'invenzione del «metodo meccanico di calcolo» di Archimede come anticipazione della nozione di «calcolatore analogico»

Archimede, non possedendo questo formalismo moderno del calcolo, per aggirare questo problema di calcolo, inventò il suo ingegnoso «metodo meccanico» di soluzione di problemi matematici, vero antesignano della nozione di *calcolatore meccanico* (di tipo analogico). Dapprima, seguendo il metodo di Eudosso delle doppie negazioni, dimostrava per assurdo la non-contraddittorietà dell'esistenza della soluzione, ovvero, in termini moderni, del *limite* della successione degli infinitesimi. Quindi «calcolava» la soluzione (approssimata) del problema mediante un opportuno esperimento fisico, misurando le grandezze fisiche *continue* relative e le rispettive variazioni, per calcolare i valori *discreti,* numerici, della relativa equazione. Così Archimede scoprì e formulò leggi matematiche famose, quali quelle della *lunghezza dei bracci di leva*, del *galleggiamento dei corpi*, etc. che portano il suo nome.

La soluzione del problema delle quadrature coincide con la nascita della scienza moderna

Come detto, per risolvere matematicamente in maniera *astratta* e quindi *universale* il problema della quadratura delle curve o di calcolo delle forme integrali bisognerà attendere così l'età moderna. Anzi, dal punto di vista della storia della matematica, si può dire che, se l'inizio dell'età moderna coincide con la nascita della scienza moderna, la nascita della scienza moderna coincide con la soluzione di questo problema. Fu infatti l'invenzione del calcolo infinitesimale, ad opera di Newton e Leibniz, a risolvere il problema della quadratura dopo duemila anni, nel XVII secolo. In questo modo, il calcolo diede alla «nuova scienza» galileiana della natura, nata un secolo prima, tutta quella capacità predittiva sull'evoluzione temporale delle grandezze fisiche rappresentabili geometricamente, che è alla base della potenza e quindi dei successi della scienza e della tecnologia moderne, almeno degli inizi.

La natura non va contemplata, ma interrogata attraverso le nostre ipotesi matematiche

Galilei aveva infatti sì recuperato l'antica idea greca della natura matematica e soprattutto geometrica delle leggi fisiche, ma integrando quest'idea con due nuovi *principi metodologici*:

- La natura non va contemplata, ma *interrogata* mediante le nostre ipotesi matematiche in base alle quali costruire degli *esperimenti*.
- L'osservazione sperimentale della natura avviene, non attraverso i cinque sensi e l'esperienza ordinaria, ma attraverso un rigoroso metodo sperimentale, inteso come *misurazione* di grandezze fisiche (Cfr. *infra* **Capitoli 2 e 4**).

Mancanza di generalizzazione del metodo galileiano per l'assenza di un metodo di calcolo universale, capace di risolvere il problema della quadratura delle curve

Tuttavia, la famosa *legge della caduta dei gravi* di Galilei, che in maniera rivoluzionaria legava la caduta non al peso e quindi alla natura del corpo — contro il buon senso e la fisica aristotelica —, ma *cinematicamente* (v. *cinematica**) alla sola «variabile geometrica» dell'altezza relativa del corpo (e quindi *dinamicamente* (v. *dinamica**), dopo Newton, all'azione della forza di gravità terrestre), aveva la forma matematica della ben nota equazione della parabola, conosciuta anche dai Greci. Così senza l'invenzione cartesiana della *geometria analitica* e l'invenzione del *calcolo infinitesimale* che rendeva possibile associare equazioni di tipo algebrico (polinomi) a curve di qualsiasi forma, la scienza galileiana non sarebbe mai diventata la scienza moderna che conosciamo.

L'invenzione del calcolo e l'universalizzazione del metodo galileiano matematico-sperimentale

Viceversa, grazie al calcolo, che è alle radici del successo della scienza moderna che è davanti agli occhi di tutti, l'intuizione galileiana ha potuto sviluppare tutta la sua straordinaria fecondità. Anche se, purtroppo, almeno agli inizi della modernità, al prezzo di una, peraltro non–necessaria *assolutizzazione* dei concetti matematici, legata all'uso del principio di evidenza nell'*algebra** e nel calcolo, da parte di Descartes e Leibniz innanzitutto. Un'assolutizzazione che è alla radice dello scientismo illuminista moderno e che solo la scoperta del carattere necessariamente *ipotetico* delle scienze matematiche pure ed applicate supererà, prima storicamente con la scoperta delle *geometrie non-euclidee* (§ 1.5.1) e poi teoreticamente con la scoperta delle antinomie e della loro soluzione nella Teoria dei Fondamenti della Matematica conseguente alla suddetta scoperta (§1.6.3).

Fra l'altro, l'interpretazione essenzialista, che Galilei abbracciò per render conto della rivoluzione culturale della «nuova» scienza, come anticipato nell' **Introduzione** era finalizzata anche ad evitare questa assolutizzazione algebrica della matematica.

Il carattere non-filosofico del «platonismo» galileiano e il suo rifiuto dell'uso dell'algebra nei calcoli della «nuova fisica»

Quest'affermazione di platonismo *di fatto* dell'impostazione galileiana va comunque mitigata con le più recenti scoperte fatte dagli storici come Stillman Drake (Drake 1990), che hanno lavorato direttamente sugli appunti di Galilei, circa l'indole assolutamente non filosofica, ma strettamente *sperimentale* della scoperta galileiana del 1604 della legge della caduta dei gravi. Una scoperta derivata dalle sue geniali, rigorose e diuturne misurazioni, che lo portarono a convincersi del comune rapporto fra la distanza percorsa dal corpo in moto e il quadrato dei tempi, in diverse situazioni sperimentali. Come Drake sottolinea con forza, queste scoperte e queste misurazioni furono fatte da Galilei senza che egli abbia mai scritto un'equazione algebrica, sebbene evidentemente egli non dovesse ignorare l'*algebra** sotto forma di equazioni, che proprio durante i suoi anni di insegnamento della matematica a Pisa andava affermandosi.

Il rifiuto quasi ideologico da parte di Galilei dei metodi algebrici in matematica

Tuttavia, nei suoi appunti, egli si limitò ad usare in maniera ferrea la nozione di «numero» contenuta nel V Libro degli *Elementi* di Euclide come rapporto e come proporzionalità fra grandezze continue, così che egli lavorò soltanto con numeri interi e frazioni intere di numeri (=numeri razionali). Se questo rendeva i suoi calcoli molto complicati e l'algebrizzazione di essi ad opera di Descartes e Leibniz può essere certamente salutata come una semplificazione che — lo ripetiamo — è alla base della diffusione e del successo della scienza moderna galileiana, pur tuttavia essi erano all'epoca assolutamente rigorosi, visto che la fondazione del calcolo, basato sulla nozione newtoniana di *serie infinita convergente* ad un limite definito in senso moderno dovrà attendere l'ottocento, e il lavoro di Dedekind sul concetto di *numero reale* e la successiva assiomatizzazione del concetto di *limite* ad opera di Cauchy e Weierstrass (Cfr. **Capitolo 2**).

Limite computazionale della fisica galileiana alla radice del suo valore post-moderno

Il limite computazionale della fisica–matematica galileiana — col senno di poi, quello della matematica post–moderna dopo i teoremi di Gödel — diviene così, di fatto, un pregio dal punto di vista teoretico. Un pregio che è alla base anche dell'accettazione da parte di Galilei nel 1616 — all'epoca della sua prima denuncia al tribunale ecclesiastico (cfr. la *cronologia* della questione galileiana nell'**Introduzione**) — del suggerimento di Bellarmino di dare alle sue dimostrazioni, e a quelle della fisica–matematica copernicana in generale, valore *ipotetico,* anche se non nel senso delle "finzioni mentali" dei suoi nemici pseudo-aristotelici rinascimentali. Un'ipoteticità che non andava a contrastare col valore *assoluto* degli asserti della fede. Infatti, nota saggiamente Drake, Galileo — e dopo di lui Newton — si preoccuparono di evitare eventuali trappole ragionando soltanto in termini di rapporti e di proporzionalità (definita da Euclide come «identità di rapporto»), *relazioni non vincolate ai numeri come assoluti*. Leibniz e prima di lui Cartesio, non osservarono la medesima cautela, e con ciò aumentarono la facilità di calcolo, alle spese del rigore matematico del procedimento (almeno fino all'assiomatizzazione del calcolo nel secolo XIX, *N.d.R.*) (Drake, 2009, p. 6).

1.2 Eclissi moderna della filosofia della natura

La scienza moderna e la ripresa della visione democritea

I rapporti fra filosofia della natura e le nascenti scienze naturali nei primi tre secoli della modernità sono stati in seguito resi difficili dal fatto che le scienze naturali — causa la sciagurata opposizione ad esse nel processo a Galilei da parte di filosofi della natura aristotelici (Cfr. **Introduzione**) — si presentarono invece, come portatrici di certezze *assolute* e non *ipotetiche,* sostitutive di quelle dell'antica filosofia naturale e addirittura dell'antica metafisica scolastica (Koyré, 1961)[2]. Così, la suddetta ripresa dell'ispirazione pitagorico–platonica nello studio della natura, non significò la contemporanea ripresa del contenuto più propriamente idealista e spiritualista della metafisica platonica, bensì piuttosto l'affermarsi di una visione del mondo che si rifaceva esplicitamente ad un meccanicismo a base geometrica di tipo democriteo, riletto in chiave antimetafisica e più tardi anti-filosofica *tout–court.*

La scienza moderna e l'affermarsi dell'ideologia scientista: illuminismo e positivismo

È questo il nucleo fondamentale di quelle «visioni del mondo» o «ideologie*» *illuminista* (sec. XVIII) e *positivista* (sec. XIX) caratterizzate dal loro «scientismo» che, insieme con l'altra visione del mondo o *ideologia** ad esse opposta ed in qualche modo successiva, quella *storicista*, hanno fatto sì che l'età moderna fosse definita da Martin Heidegger come l'«età delle visioni del mondo» (Heidegger, Sentieri interrotti, 1954, pp. 71-101). La crisi moderna della filosofia della natura ha dunque coinciso con la crisi della filosofia *tout court* di fronte all'avanzata delle scienze naturali, dei loro metodi sperimentali e del loro linguaggio matematico. Sempre di più nella cultura e nella mentalità moderne sono le scienze ad essere divenute dispensatrici — per i popoli e per i singoli, per i governanti e i loro sudditi, dapprima dell'occidente e poi anche dell'oriente — di quelle certezze conoscitive, di

[2] Il titolo del testo qui citato si spiega da solo: «Dal mondo del pressappoco all'universo della precisione». Che il rigore formale delle discipline scientifiche contemporanee, naturali e matematiche – e speriamo anche filosofiche –, abbia raggiunto livelli di raffinatezza sconosciuti al pensiero classico è un dato di fatto incontestabile.

quella «conoscenza bene fondata» detta appunto «scientifica» (l'e)pi-sth/mh dei greci e la *scientia* dei latini) che nell'antichità erano dispensate dalla metafisica e dalla teologia.

L'eclissi moderna della filosofia della natura

Ciò è divenuto talmente vero, come fenomeno culturale generalizzato, che il termine *scienza* nella cultura moderna è ormai sinonimo di *scienza naturale* e di *scienza matematica* (o «logico - matematica» a partire dalla fine del secolo scorso). Tutto ciò è stato naturalmente favorito, per una sorta di suicidio intellettuale, anche dal fatto che la riflessione filosofica e metafisica in generale è andata progressivamente perdendo nella modernità quel rigore dimostrativo che pure aveva nella classicità e nel medioevo, isterilendosi in una sorta di disciplina a metà strada fra la riflessione estetica, l'ideologia e l'esercizio retorico. Un suicidio intellettuale che ha enormemente impoverito la cultura ed il pensiero moderni, privandolo di una sua componente essenziale. Nell'ambito universitario, filosofia della natura e metafisica a base naturalista di tipo scolastico sono così sopravvissute nella modernità quasi esclusivamente come discipline ausiliarie nei *curricula* di studio di facoltà teologiche cattoliche, non di rado ideologicamente e quindi sterilmente contrapposte alle discipline scientifiche moderne.

Il recupero odierno della scientificità della filosofia grazie alla *filosofia formale*

Ecco perché, come anticipato nell'**Introduzione,** la *filosofia formale* sulla base del metalinguaggio della TC, costituiscono la premessa necessaria per una rinnovata *dignità scientifica* della filosofia, dotandola di un metodo universale per il confronto delle teorie ontologiche, epistemologiche ed etiche, senza i riduzionismi e le incongruenze che l'uso della TI come metalinguaggio della logica filosofica nella *filosofia analitica* di novecentesca memoria recano con sé.

1.3 Filosofia hegeliana della natura

La filosofia della natura nel sistema hegeliano

La «filosofia della natura», come disciplina distinta dalle scienze naturali, nel vocabolario culturale «laico» dell'università moderna ha momentaneamente ripreso quota nella prima metà del secolo scorso con la meteora della filosofia hegeliana e con la sua visione del mondo «storicista»[3].

[3] Ricordiamo come la *filosofia della natura* nell'*Enciclopedia* hegeliana delle scienze filosofiche costituisse il secondo momento, quello dell'«antitesi», del processo storico–dialettico di autocoscienza dello spirito assoluto. Il momento in cui l'«idea in sé», oggetto della *logica*, si «alienava», si «negava» nel «per sé» della natura materiale, regno dell'oscura e cieca necessità, per «riprendersi» nella «sintesi» delle varie forme naturali e storiche di vita dello *spirito*, «soggettivo», «oggettivo», fino all'autocoscienza piena dello spirito «assoluto». Tale momento

Mediante il *metodo storico - dialettico** d'indagine, la filosofia aveva, infatti, cercato di ritagliarsi di nuovo un ruolo e un proprio ambito di sopravvivenza nella cultura moderna, condizionata nel secolo scorso dall'avanzata dell'ideologia scientista, quella «positivista» in particolare. La crisi dell'idealismo storicista hegeliano come sistema metafisico onnicomprensivo e il suo decadimento a semplice filosofia politica, nelle due ideologie contrapposte della «destra» e della «sinistra» hegeliane, ha coinciso perciò con una nuova eclissi della filosofia della natura dall'ambito culturale moderno. Bisognerà attendere gli anni '30 del XX secolo per una rinascita della filosofia della natura su basi completamente diverse da quelle hegeliane (Cfr. **Capitolo 3**).

La dissoluzione del sistema hegeliano e la nascita delle scienze dell'uomo

Dissoltasi come neve al sole la filosofia della natura hegeliana nella sua vana pretesa di porsi come alternativa ideologica, come «visione del mondo» contrapposta, alla scienza naturale galileiano–newtoniana e al suo metodo, lo stesso tentativo di far rinascere la filosofia come «scienza dello spirito» secondo il metodo storico–dialettico, è stato inesorabilmente fagocitato dal potere effettivo sul reale del *metodo operazionale**, sperimentale - matematico, tipico del modello galileiano di scienza naturale. In tal modo, la filosofia della storia hegeliana come assoluta «scienza dello spirito» si è frammentata in una molteplicità di discipline empiriche di ricerca, le cosiddette *Geisteswissenschaften,* che hanno per oggetto l'uomo, la sua storia e le sue attività. Sono progressivamente nate così la *psicologia*, la *sociologia*, l'*economia*, la *storiografia* e le discipline ad esse connesse, che hanno via via perduto, del ceppo hegeliano da cui nascevano, non solo il metodo storico–dialettico di indagine, ma anche la dizione, trasformandosi da altisonanti «scienze dello spirito» (*Geisteswissenscahften*) in molto più modeste ed effettive *scienze dell'uomo.*

Le scienze dell'uomo e il modello galileiano di scienza

Infatti, dopo il fallimento dei tentativi dello storicismo tedesco ottocentesco post–hegeliano di dare alle *Geisteswissenschaften* un metodo rigoroso di indagine e di *formalizzazione** contrapposto a quello sperimentale–matematico o *metodo operazionale** delle scienze naturali (*Naturewissenschaften*), sempre di più il linguaggio matematico e strumenti sperimentali quantitativi di indagine sono venuti a caratterizzare anche le scienze dell'uomo. In tal maniera, esse, invece che essere sterilmente ed ideologicamente contrapposte alle scienze della natura, hanno finito per esercitare un prezioso e tutt'altro che esaurito stimolo per la revisione dei fondamenti del pensiero logico e matematico moderno che ha caratterizzato la fine dell'800

---

sintetico costituisce il regno dell'«in sé e per sé» della libertà meta–individuale dello spirito, che si esprime nelle tre forme storiche successive dell'*arte*, della *religione* e infine della *filosofia,* come più alta e definitiva «scienza dello spirito». Scienza che, ovviamente, aveva nella filosofia hegeliana la sua massima espressione.

e tutta la prima metà del '900. I formalismi logico–matematici che erano stati sviluppati nella modernità per lo studio della *meccanica** sono risultati del tutto inadeguati al trattamento rigoroso di fenomeni *complessi*, sia nelle scienze fisiche, chimiche e biologiche (Cfr. *infra,* **Capitolo 2**) che, a maggior ragione, in quelli di tipo psicologico, sociale ed economico, quali quelli oggetto delle *scienze dell'uomo*.

1.4 Radice dello scientismo illuminista

1.4.1 Apogeo del programma illuminista

Lo sviluppo e la sistematizzazione dell'analisi matematica

La parabola della meteora hegeliana si sviluppa di pari passo ad un approfondimento dei fondamenti della matematica moderna, forse nel momento del suo massimo splendore. Quello in cui attraverso l'opera di matematici del livello assoluto di un Giuseppe Luigi Lagrange (1736-1813), di un Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783), di un Augustin Cauchy (1789-1857), la chiave dei successi della scienza moderna, il calcolo, e la sua rigorosa applicazione ai problemi della meccanica e della dinamica sembrava ricevere una sistematizzazione definitiva, mediante l'approfondimento e lo sviluppo della nozione di *funzione** all'interno di un quadro finalmente rigoroso della nuova disciplina dell'*analisi matematica*.* Tale sviluppo culminerà, nella seconda metà del secolo XIX dopo la prima definizione rigorosa del concetto di *numero reale** ad opera di Richard Dedekind (1831-1916), nella definizione formale della nozione di *limite** ad opera del matematico tedesco Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897), all'interno di un approccio all'analisi matematica svincolato da ogni riferimento all'intuizione geometrica — come invece lo era agli inizi e particolarmente in Newton — e tendente alla sua completa aritmetizzazione (aritmetica dei numeri reali) e algebrizzazione.

Dalla sistematizzazione dell'analisi alla crisi dei fondamenti

Ma proprio questo sviluppo della regina delle scienze nel «secolo dei lumi», l'*analisi matematica*,* che mediante il suo completamento e la sua rigorosa formalizzazione doveva presagire al definitivo trionfo del «rischiaramento illuminista» e del suo programma scientista, conteneva in sé i germi del disfacimento di tale programma. Esso fu innestato dalla successiva riflessione sui fondamenti dell'analisi e della sua aritmetizzazione sui numeri reali ad opera di Hilbert e di Georg Cantor. Prima però di addentrarci in una sommaria ricostruzione dei punti di svolta principali della riflessione sui fondamenti della matematica e dei motivi teorici che spinsero ad essa (Cfr. *infra* § 1.6, pp.89ss.), soffermiamoci un attimo ad approfondire la radice teoretica del programma scientista dell'illuminismo.

1.4.2 Assolutizzazione dell'evidenza

La pretesa assoluta autoevidenza dei postulati della geometria euclidea e delle leggi della fisica newtoniana

La soluzione del problema della quadratura delle curve nella forma algebrica del moderno calcolo integrale e i successi della moderna fisica–matematica galileiano-newtoniana associati a queste straordinarie scoperte, rafforzarono la convinzione che i postulati della geometria euclidea, alla base delle rappresentazioni matematiche di quella fisica, fossero *veri,* ovvero adeguate rappresentazioni formali dello spazio fisico. Lungi però dal voler attribuire *verità* a questi postulati su una intuizione empirica, prova di essa sarebbe stata la loro assoluta *auto-evidenza*[4] analoga a quella, puramente formale, indipendente da qualsiasi contenuto empirico, alla base dell'algebra moderna e delle sue tautologie analitiche. Si basa su questa tacita convinzione tutto lo scientismo illuminista dei secoli XVIII–XIX. La pretesa cioè che la «nuova scienza» fisico–matematica, proprio perché basata sul *rigore assoluto* di deduzioni fondate su nozioni vere perché autoevidenti — gli assiomi di Euclide in geometria e le tre leggi di Newton della meccanica in fisica (sulla centralità dell'evidenza come criterio di verità di una fisica costruita sul modello della geometria, cfr. **Capitolo 2**.) —, potesse sostituire la vecchia metafisica e la vecchia filosofia della natura, ridotte, insieme con la teologia, a rango di pure superstizioni.

Il determinismo meccanicista assoluto e «il demone di Laplace»

Meglio di qualsiasi commento, valgano questi due aneddoti, che, al di là di ogni commento, fotografano perfettamente lo spirito dello scientismo imperante in certi settori della cultura moderna alla fine del XVIII secolo. Il primo, più famoso, riguarda il dialogo fra il grande fisico e matematico Pierre Simon de Laplace (1749-1827) e Napoleone a proposito del commento di quest'ultimo alla monumentale opera di Laplace, il trattato *Le Systéme du Monde* (1797). All'osservazione di Napoleone che commentava sorpreso come in questo trattato di cosmologia mancasse qualsiasi riferimento a Dio, Laplace rispondeva sprezzante che «non aveva avuto bisogno di quest'ipotesi». Quest'affermazione era legata al presupposto di *determinismo assoluto* di tipo meccanicista nelle scienze della natura, divulgato come «principio del demone di Laplace», che trova la sua enunciazione più completa in un passo famoso dell'altro suo trattato di filosofia della natura: *Essai philosophique sur les probabilites:*

> Un'intelligenza che, per un istante dato, potesse conoscere tutte le forze da cui la natura è animata, e la situazione degli esseri che la compongono, e che inoltre fosse abbastanza grande da sottomettere questi dati all'*analisi*, abbraccerebbe nella stessa formula i movimenti dei più grandi corpi dell'universo e quelli dell'atomo più

---

[4] Questa convinzione è, in particolare, alla base della dottrina cartesiana che identifica la nozione geometrica di estensione o *res extensa,* con la *materia fisica,* facendo anzi di questa presunta *autoevidenza* la seconda idea «chiara e distinta» o *autoevidente* del suo sistema.

> leggero: nulla le risulterebbe incerto, l'avvenire come il passato sarebbe presente ai suoi occhi. *Lo spirito umano offre, nella perfezione che ha saputo dare all'astronomia, una debole parvenza di questa intelligenza*[5].

In altre parole, se fosse possibile conoscere, con precisione statistica incrementabile a piacere, al limite infinita, quale appunto ad un «demone» sarebbe possibile, le «condizioni iniziali del moto» (*posizione*, *q*, e *quantità di moto*, *p*: le cosiddette "variabili canoniche" della meccanica classica o «newtoniana») di tutte le particelle che compongono l'universo fisico, dalle suddette condizioni iniziali, mediante il solo ausilio delle leggi della dinamica, sarebbe possibile conoscere (dedurre) con la medesima precisione l'evoluzione dell'intero universo. L'astronomia moderna, nella sistematizzazione offerta da Laplace stesso nel suo capolavoro *Mecanique Céleste* (1798-1825) sulla scorta delle leggi newtoniane della gravitazione, offre dunque per lo scienziato francese un'esemplificazione di quel paradigma di scienza assoluta della natura cui in questo brano si fa riferimento

L'esaltazione ideologica della nuova fisica come modello di sapere assoluto, sostitutivo della filosofia della natura

L'altro aneddoto — perché non può essere più di questo — consiste in un brano, riportato da E. Cassirer nella sua *Storia del pensiero moderno* (Cfr. (Cassirer, 1978), vol.II, t.2, p. 444)), tratto dall'opera di uno sconosciuto divulgatore delle idee newtoniane, S. Emerson, nel suo *The Principles of mechanics,* pubblicato a Londra nel 1773. Questo brano, seppure meno famoso del precedente aneddoto, è esemplare dello stato di vera e propria esaltazione dionisiaca che in certi ambienti culturali provocava il mito della certezza assoluta delle nuove conquiste scientifiche[6]. Allo stesso tempo questo brano è esemplare della convinzione che la «nuova» scienza fisico–matematica newtoniana non fosse un'altra forma di sapere complementare alla metafisica e alla filosofia della natura, ma una nuova e definitiva filosofia della natura, assolutamente incommensurabile con quelle che l'avevano preceduta e insuperabile da qualsiasi altra potesse seguirla.

> *La filosofia newtoniana, ossia l'unica vera filosofia che vi sia al mondo*, è ugualmente fondata sulla meccanica. (...) Alcuni hanno ignorantemente obbiettato che la filosofia newtoniana come tutte le altre che l' hanno preceduta, invecchierà e sarà superata da qualche nuovo sistema (...). Tale obbiezione è del tutto falsa. *Nessun filosofo prima di Newton infatti adoperò mai il suo sistema.* Mentre i sistemi filosofici non sono altro che ipotesi, opinioni, finzioni, congetture,

---

[5] Citato in (Ruelle, 1984, p. 16).

[6] Addirittura, si arrivò ad affermare che Newton era il «nuovo Mosé». Come Mosé aveva donato all'umanità le certezze assolute dei dieci comandamenti in campo morale, così Newton aveva donato le certezze assolute delle tre leggi della dinamica in campo fisico. Questo era anche implicito nel famoso adagio kantiano «il cielo stellato sopra di me (con riferimento alla legge newtoniana della gravitazione universale, *N.d.R.*), la legge morale dentro di me», per significare le due sedi moderne della certezza assoluta.

> fantasticherie, inventate a piacimento senza alcun appoggio nella natura delle cose, egli al contrario costituì da sé solo una base del tutto differente. Egli infatti non ammette se non ciò che ottiene *attraverso esperimenti ed osservazioni accurate*; quanto viene costruito poi in qualsiasi modo su questa base, *è dedotto secondo un rigoroso ragionamento matematico* (Corsivi nostri).

La filosofia kantiana come giustificazione epistemologica di questa convinzione e la critica della metafisica

Questa stessa convinzione secondo la quale, con l'estensione analitica della geometria euclidea, nella matematica, e con la meccanica newtoniana, in fisica, si era ormai arrivati ad un «nocciolo duro» di conoscenze *assolutamente certe*, che nulla avevano a che fare con le incertezze e le oscurità della vecchia metafisica e della vecchia filosofia della natura, è anche il punto di partenza dell'opera di Immanuel Kant (1724-1804). Questa convinzione costituisce, infatti, il fondamento della costruzione dell'edificio delle tre *Critiche,* ed in particolare della prima di esse: la *Critica della Ragion Pura*. Opera, questa, dedicata ad investigare quali siano le condizioni che rendono le scienze matematiche e fisiche «pure» (non applicate) dotate di quella necessità ed universalità *assolute*, considerate caratteristiche proprie della scienza autentica, che invece mancano a qualsiasi metafisica proposta nella storia del pensiero. Nell'*Introduzione* alla Seconda Edizione di quest'opera (1787) Kant, infatti, si domanda:

> *Com'è possibile una matematica pura? Com'è possibile una fisica pura?* Di queste scienze, poiché esse realmente ci sono, vien bene domandarsi *come* siano possibili, perché che debban essere possibili è provato dalla loro esistenza di fatto [In nota: Taluno potrebbe ancora dubitare che quest'esistenza l'abbia la fisica pura. Ma basta dare un'occhiata alle diverse proposizioni che s'incontrano all'inizio della fisica propriamente detta (empirica), come quelle della permanenza della stessa quantità di materia, dell'inerzia, dell'uguaglianza fra azione e reazione e così via, per convincersi che costituiscono una *physicam puram* (o *rationalem*)[7], che merita bene di essere esposta separatamente, come scienza speciale, in tutta la sua estensione, piccola o grande che sia]. Per ciò che riguarda invece *la metafisica* il suo progresso è stato fin qui assai infelice, poiché di nessuna delle metafisiche fin qui esposte, per ciò che concerne il suo scopo essenziale, si può affermare che realmente esista, deve ad ognuno lasciar dubitare con ragione della sua possibilità (Kant 1787, 55).

La progressiva disfatta del mito scientista nei secoli XIX–XX

Quanto avverrà negli anni immediatamente seguenti nel santuario della certezza scientifica, la geometria euclidea, e quanto avverrà durante tutto il secolo XIX e nei primi trent'anni del XX nelle scienze matematiche e fisiche, provocherà un terremoto concettuale di tali proporzioni che ha distrutto l'edificio ritenuto incrollabile dell'assolutezza di queste certezze. Un terremoto le cui scosse di assestamento sono tutt'altro che terminate,

---

[7] Si tratta dell'antesignana di quella materia che oggi si insegna in qualsiasi facoltà di fisica e che va sotto il nome di «meccanica razionale» e che generalmente include la meccanica classica e statistica.

anzi con le quali dovremo abituarci a convivere a lungo anche in questo inizio di terzo millennio, sebbene insieme ai segni sempre più evidenti di un «risveglio adulto» della ragione umana, non più schiava dei miti della sua assolutizzazione.

1.5 Crisi dei fondamenti della matematica nel secolo XIX

1.5.1 La nascita delle geometrie non–euclidee e l'assiomatizzazione della matematica

Il quinto postulato di Euclide e le sue varie formulazioni

La presunta autoevidenza e quindi la presunta «verità assoluta» dei cinque postulati euclidei era un'idea che, nell'antichità, aveva suscitato più di qualche perplessità nei filosofi e nei matematici. Fra i filosofi, innanzitutto, Aristotele rifiutava tale idea, perché autoevidenti erano per lui solo gli *assiomi,* ovvero i primi principi della metalogica e della metafisica, quali il p.d.n.c.. Fra i matematici, invece, a suscitare perplessità era in particolare il quinto postulato. Esso afferma: «date due rette, ed una terza intersecante le prime due, queste s'incontrano nella direzione in cui la somma degli angoli dell'intersezione è minore di due retti». In altri termini, date due rette parallele, esse non s'incontrano mai neanche *all'infinito*[8]. Un'altra formulazione equivalente del medesimo assioma, che ci risulterà utile fra poco, è la seguente: «per un punto esterno ad una retta passa *una ed una sola parallela* alla retta data».

Difficoltà circa l'evidenza del quinto postulato e necessità di dimostrare la sua verità

L'idea che faceva difficoltà agli antichi era proprio il fatto che molte linee cosiddette «asintotiche» che al finito non s'incontrano, all'infinito invece s'incontrano (p.es., un'iperbole è asintotica ai suoi assi: Cfr. Figura 1-3)[9]. Poiché dunque il quinto postulato sembrava tutt'altro che «autoevidente», nacque in molti matematici, antichi e moderni, l'esigenza di *dimostrare la verità* di esso, deducendolo dagli altri quattro[10].

---

[8] Infatti, la somma degli angoli adiacenti dell'intersezione di una qualsiasi secante di due rette parallele in ciascuna delle due direzioni è sempre equivalente a due angoli retti, qualsiasi delle due direzioni si prendano.

[9] Un testo che dimostra, con un numero impressionante di prove documentali come la questione del quinto postulato e quindi delle geometrie euclidee e non-euclidee attraversi tutto il pensiero occidentale da Platone, Eudosso, Aristotele ed Euclide fino alla matematica moderna, è il libro di Imre Toth (Toth, 1997), dedicato al commento di frammenti non–euclidei nel *Corpus Aristotelicum*.

[10] Essi sono: 1) per due punti distinti passa una sola retta; 2) Ogni segmento può essere prolungato indefinitamente; 3) Dati un centro e una distanza qualsiasi si può descrivere un cerchio; 4) Tutti gli angoli retti sono uguali fra di loro.

Il fallimento dei tentativi di dimostrazione del quinto postulato

Nell'età moderna, una serie di matematici di prim'ordine si dedicò al problema della dimostrazione del quinto postulato, tutti fallendo nel loro compito. Fra essi ricordiamo il gesuita italiano Girolamo Saccheri (1667-1733), lo svizzero tedesco Joan Heinrich Lambert (1728-1777) e il francese Adrien Marie Legendre (1752-1833). Il fallimento di questi tentativi di dimostrazione rafforzò nell'opinione pubblica la convinzione che anche il quinto postulato, nonostante le sue difficoltà, si dovesse prendere come assolutamente vero perché *autoevidente*. Con ciò veniva definitivamente confermato il principio cartesiano–kantiano dell'evidenza e distrutta nella modernità l'idea aristotelica e scolastica della differenza fra *assiomi* (assoluti) e *postulati* (ipotetici) e quindi della differenza fra i principi della metafisica e quelli delle diverse scienze, innanzitutto quelle matematiche e fisico–matematiche, che si confermavano così essere le nuove «scienze assolute» del «secolo dei lumi», in grado di rimpiazzare l'obsoleta metafisica. In ogni caso, considerazioni filosofiche a parte, la supposta autoevidenza dei postulati euclidei giustificava in pieno l'uso linguistico moderno di considerare la nozione di «assioma» del tutto equivalente a quella di «postulato».

I dubbi di Gauss sull'assolutezza della geometria euclidea

Quando dunque, intorno al 1820, il *princeps mathematicorum,* Friedrich Gauss (1777-1855), si convinse invece che l'indimostrabilità del quinto postulato — soprattutto alla luce del fallimento della dimostrazione per assurdo che ne aveva tentato Saccheri[11] — non era semplice questione di fatto, ma nascondeva la possibilità della coerenza di una geometria senza il quinto postulato — quindi la possibilità di «geometrie non-euclidee», come egli stesso per primo le definì — si guardò bene di divulgare questa notizia per l'impopolarità che gliene sarebbe derivata. Ma la dimostrazione era nell'aria o, se vogliamo usare una terminologia hegeliana, era «nello spirito dei tempi».

[11] Saccheri aveva cercato, senza riuscire, di dimostrare la verità del quinto postulato mediante la dimostrazione dell'assurdità della sua negazione.

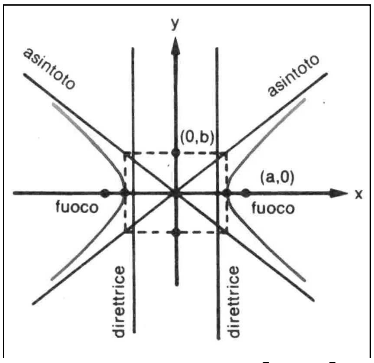

Figura 1-3. Iperbole nella forma canonica $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2=1}$, ovvero curva piana che si definisce come luogo dei punti per i quali è costante la differenza delle distanze da due determinati punti definiti come i *fuochi* dell'iperbole. Si noterà dalla figura come i bracci dell'iperbole si sovrappongano solo all'infinito con i rispettivi asintoti. Solo all'infinito infatti la differenza delle distanze dai fuochi sarà uguale a zero.

Di lì a pochi anni, nel 1829, il matematico russo Nicolaj Ivanovic Lobacevskji (1793-1856) rettore dell'Università di Kazan, e, nel 1832, il giovane matematico ungherese Janos Bolyai (1802-1860) giunsero alla medesima conclusione di Gauss, pubblicandone, però, i risultati e cercando — inutilmente, almeno Bolyai —l'appoggio pubblico di quest'ultimo.

La fondamentale dimostrazione di Lobacevskji dell'impossibilità logica di dimostrare il quinto postulato

In particolare, Lobacevskji dimostrò l'impossibilità di dimostrare il quinto postulato nella sua formulazione equivalente già ricordata (ovvero l'enunciato euclideo che per un punto fuori di una retta può passare una ed una sola parallela alla retta data). Su questa base egli costruì quella che definì una «geometria immaginaria», del tutto astratta dalla percezione comune, senza il quinto postulato. Una geometria che pure era perfettamente coerente: la prima geometria non–euclidea, di tipo iperbolico, mai proposta con successo nella storia dell'umanità.

La «geometria assoluta» di Bolyai

Bolyai, da parte sua, andò, se possibile, ancora più avanti, dimostrando che non è contraddittorio ammettere che per un punto non solo passi più di una parallela, ma addirittura *infinite parallele* ad una retta data. In tal modo, costruì su questa base una geometria non-euclidea «assoluta» — «scienza assoluta dello spazio», la definì —, proprio perché in qualche modo basata su un'ipotesi più comprensiva di quella di Lobacevskji. Ma fu soltanto con Bernhard Riemann (1826-1866) che la rivoluzione concettuale innestata dalle sconvolgenti scoperte dei tre succitati autori, raggiunse il suo culmine.

Il senso di questa rivoluzione concettuale.

Prima però d'illustrarla per quanto sommariamente, è bene fissare immediatamente una riflessione epistemologica fondamentale, che aiuti a rendersi conto di quanto qui era successo e del *cambio epocale* che queste scoperte hanno implicato. Così, per esempio, lo descrivono E. Nagel e J. R. Newman:

> La convinzione tradizionale che gli assiomi della geometria (o gli assiomi di qualunque sistema) possano essere provati dalla loro apparente autoevidenza, fu così radicalmente distrutta. Inoltre, poco alla volta risultò chiaro che il vero compito del matematico puro è quello *di derivare teoremi da ipotesi postulate*, senza che debba preoccuparsi come matematico di decidere se gli assiomi introdotti siano di fatto *veri* (Nagel & Newmann, 1993, p. 21).

La fine dell'illusione moderna di usare l'evidenza come criterio assoluto di verità

Rimandando a §1.6.3 la rigorosa prova di questa affermazione, tutta la pretesa della filosofia moderna dopo Descartes di sostituire come criterio di verità l'evidenza e/o l'auto-evidenza di alcune proposizioni a quello dell'adeguatezza all'essere, si dimostrava così infondata. Abbiamo già ricordato che questa convinzione era talmente radicata che il massimo dei matematici moderni, Gauss, si proibì addirittura di parlare in pubblico di questa straordinaria scoperta, perché il suo buon nome non venisse intaccato. Come ricorda Boyer nella sua storia della matematica, «in diverse lettere ai suoi amici Gauss elogiò le ricerche di Lobacevskji, ma non volle mai riconoscerle nei suoi scritti per timore di suscitare le risa dei 'beoti' (*sic!*)». Così ancora si esprime Boyer:

> Lobacevskji viene considerato «il Copernico della geometria» come colui che ha rivoluzionato questo campo della matematica creando un'intera branca completamente nuova (…) mostrando *come la geometria euclidea non fosse quella scienza esatta depositaria di verità assolute quale era stata quella precedentemente considerata.* In un certo senso, possiamo affermare che la scoperta della geometria non-euclidea inferse un colpo mortale alla filosofia kantiana, paragonabile alle conseguenze che la scoperta delle grandezze incommensurabili ebbe per il pensiero pitagorico (Cfr. sopra § 0). L'opera di Lobacevskji rese necessario *modificare radicalmente le concezioni fondamentali circa la natura della matematica* (Boyer, 1982, p. 621). Corsivi nostri.

1.5.2 La formalizzazione di Riemann

L'assiomatizzazione della geometria dopo Riemann e il carattere puramente formale delle scienze matematiche

Quali fossero le conseguenze cui accennava Boyer divenne chiaro però solo dopo che Bernard Riemann, nella sua famosissima tesi di abilitazione, *Sulle ipotesi che stanno alla base della geometria,* discussa a Gottinga dinanzi a Gauss nel 1854, ampliò il senso di «geometria non–euclidea» ben al di là della geometria iperbolica di Lobacevskji e Bolyai, costruendo una nuova geometria ellittica, basata su un nuovo postulato delle parallele. Nella sua geometria *nessuna* parallela può essere tracciata per un punto esterno alla retta data. Ma non è qui o, meglio, non è soltanto qui la rilevanza della sua scoperta. Con Riemann la geometria (e quindi tutto il resto della matematica) viene completamente *assiomatizzata,* segnando così il passaggio dal metodo cartesiano dell'evidenza a quello assiomatico. Non solo i postulati di qualsiasi scienza non vanno presi *mai* come verità assolute, bensì solo come *ipotesi*, ma — almeno in branche della scienza come la matematica «pura» — è lo stesso contenuto descrittivo dei primitivi e degli assiomi — e quindi dell'intero sistema assiomatico da essi derivato — a dover essere abbandonato. Con Riemann la scienza matematica abbandona, per la prima volta nella storia del pensiero, ogni contenuto denotativo di oggetti — i cosiddetti «enti matematici» cari alla tradizione pitagorico–platonica —, per divenire pura scienza di *relazioni sintattiche (algebriche) fra simboli* del linguaggio matematico.

La formalizzazione della geometria e la fine della matematica come «scienza della quantità»

In altre parole, malgrado il carattere paradossale di certe conclusioni, non si tratta più di parlare in geometria di «spazi», «rette», «figure» o «punti» nel senso della nostra esperienza ordinaria. La geometria dopo Riemann, propriamente, ha a che fare solo con «*ennuple* (relazioni algebriche fra simboli, come coppie, triple, etc. *N.d.R.*) che vengono raggruppate secondo precise regole».

La matematica moderna come scienza di relazioni (algebra)

La matematica cessa insomma di essere «la scienza della quantità», com'era stata per oltre duemila anni, per divenire «scienza di relazioni», la scienza formale per eccellenza che trae le sue conclusioni logicamente implicite in un qualsiasi insieme coerente di assiomi. Questo punto va ben compreso perché essenziale a comprendere quel processo di *formalizzazione* dei linguaggi scientifici che è tipico delle scienze matematiche e finalmente anche delle scienze filosofiche contemporanee.

I passi della progressiva formalizzazione della matematica

Nella scienza matematica greca la geometria, intesa come scienza matematica dello spazio, aveva come oggetto esclusivamente figure spaziali accessibili all'intuizione. Per questo, p. es., non si andava oltre lo *spazio piano a tre dimensioni* della nostra esperienza ordinaria, legata intrinsecamente al fatto che la luce (su brevi distanze) si propaga in modo assolutamente *rettilineo*.

Il primo passo: l'algebrizzazione cartesiana della geometria

Il primo passo verso la formalizzazione fu fatto fare alla geometria moderna attraverso l'*inizio dell'algebrizzazione della geometria*, in particolare quando, a partire da Descartes, divenne evidente la corrispondenza che esiste fra *geometria** ed *algebra**. Dopo la pubblicazione della sua *Géometrie,* divenne definitivamente patrimonio del pensiero matematico moderno la nozione che ogni figura geometrica rappresenta in forma spazializzata la soluzione della relativa equazione algebrica (polinomio). Senza l'algebrizzazione della geometria, come più volte detto, sarebbe stata impossibile la nascita dell'analisi matematica e del calcolo infinitesimale e quindi della scienza moderna.

Il contributo imperituro di Descartes alla nascita della scienza moderna

In particolare, grazie al simbolismo sviluppato da Descartes per le espressioni algebriche — l'uso dei segni «+» e «–», delle prime lettere dell'alfabeto per indicare le costanti, delle ultime per indicare le variabili e, soprattutto, della notazione esponenziale per indicare le potenze di numeri — la geometria poté superare quei limiti che il legame troppo stretto con l'intuizione spaziale le imponeva. Prendiamo, per esempio, il calcolo del quadrato del binomio:

$$(a+b)^2$$

Geometria analitica e geometria intuitiva: il caso tipico del quadrato del binomio

Ognuno di noi ha imparato fin dalle scuole medie a calcolarlo con un semplice *algoritmo** che consente di ottenere il polinomio risultante, attraverso una sequenza di semplici operazioni algebriche e senza alcun riferimento alla costruzione geometrica associata. Innanzi tutto, si scrivono *le variabili*, associandovi gli esponenti in senso crescente e decrescente:

$$\_a^2 + \_ab + \_b^2$$

I posti vuoti dei *coefficienti* si ottengono, per la seconda potenza del binomio, dalla seconda riga del cosiddetto «triangolo di Tartaglia» (o di Pascal), a sua volta ottenuto attraverso un altro semplice *algoritmo**. Per ogni riga, si pongono i coefficienti 1 all'inizio e al termine di essa, e gli altri si ottengono sommando i coefficienti intermedi della riga precedente:

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

……………………………

Di solito, però, quando si spiega il procedimento non si parla mai di qual'è la costruzione geometrica associata al calcolo algebrico del quadrato del binomio $(a+b)^2$ — costruzione, che fra l'altro può essere definita come un *modello geometrico* di questo calcolo che lo rende *evidentemente* vero alla percezione. La costruzione associata è quella di un quadrato come risultato della somma di due quadrati più piccoli, rispettivamente di lato *a* e *b,* con due rettangoli di lati *ab*.

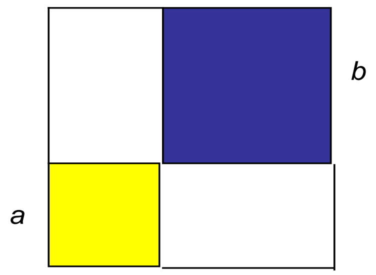

Figura 1-4. Equivalente geometrico–intuitivo del calcolo del quadrato del binomio

Ora, con lo stesso algoritmo si può facilmente calcolare la, terza, quarta, la quinta, …, l'*n*–sima potenza di un binomio — e con una regola simile definita da Newton, di un qualsiasi polinomio. P.es.,

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$
$$\ldots$$

Le potenzialità del metodo algebrico in geometria analitica

Invece, mediante il metodo intuitivo di tipo classico non si potrebbe andare oltre il cubo del binomio: è impossibile, infatti, immaginarsi uno spazio a più di tre dimensioni. Grazie, dunque, all'algebrizzazione della geometria è stato possibile estendere la geometria euclidea a spazi piani non solo a tre dimensioni, ma a *n*–dimensioni, facendo dell'evidenza *razionale* svincolata dalla percezione sensibile, il fondamento della verità matematica.

Più in generale, infatti, grazie all'algebrizzazione cartesiana della geometria siamo in grado di trasformare i postulati di Euclide della geometria piana in altrettante espressioni algebriche su un cosiddetto *grafico cartesiano* a *n* dimensioni. Nel caso più semplice bidimensionale, il «punto» corrisponderà ad una coppia di numeri (x, y) che definiscono le coordinate di quel punto; la «linea» ad una relazione (lineare) fra numeri espressa da un'equazione di primo grado a due incognite (xy); la «circonferenza» ad una relazione fra numeri espressa da un'equazione di secondo grado (πr^2), etc.

Il secondo passo: la formalizzazione riemanniana puramente algebrica della geometria

La geometria riemanniana introduce un ulteriore livello d'astrazione dai contenuti intuitivi. Le espressioni algebriche dell'algebra elementare sono pur sempre riferite a grandezze (numeriche e/o spaziali) che esse denotano in forma simbolica. Dopo Riemann le espressioni algebriche usate nella sua geometria sono costruite in modo che esse *non denotano alcunché,* sono espressioni senza significato (referenziale), ovvero puramente *sintattiche,* ma che possono assumere diversi significati (referenziali) o diverse *semantiche* attraverso un'appropriata *interpretazione**. Con Riemann la geometria diviene insomma un *sistema formale* nel senso proprio, moderno del termine. In altri termini, la geometria si trasforma in scienza deduttiva in grado di rappresentare astrattamente, col suo formalismo simbolico, non più relazioni fra grandezze, ma *relazioni* e *strutture algebriche*. Esse possono essere applicate, mediante successive interpretazioni, a molteplici tipi di entità, ma in se stesse sono prive di qualsiasi contenuto denotativo, di qualsiasi significato referenziale, di qualsiasi riferimento ad oggetto.

> Di fatto si riconobbe che la validità della deduzione matematica non dipende in alcuna maniera dal particolare significato che può essere associato ai termini o alle espressioni contenute nei postulati. Si vide così che la matematica è molto più astratta e formale di quanto non si supponesse tradizionalmente: più astratta perché, in linea di principio *si possono fare affermazioni matematiche su cose assolutamente qualsiasi, anziché su insiemi intrinsecamente circoscritti di oggetti o di proprietà di oggetti* (le proprietà quantitative, *N.d.R.*), perché la validità delle dimostrazioni matematiche *riposa sulla struttura delle affermazioni, piuttosto che sulla natura particolare del loro contenuto.* (…) Ripetiamo che l'unica questione riguardante il matematico puro (in quanto distinto dallo scienziato che usa la matematica per studiare un oggetto particolare) non è se i postulati che egli ammette o le conclusioni che egli trae dai primi sono veri, ma se le conclusioni avanzate siano, di fatto, *le conclusioni logiche necessarie* delle ipotesi da cui è partito (…). Fintantoché abbiamo a che fare col compito essenzialmente matematico di esplorare le relazioni puramente logiche di dipendenza tra le varie affermazioni, i significati familiari dei termini primitivi (i termini con cui sono costruiti i postulati di partenza, *N.d.R.*) devono essere ignorati e gli unici «significati» associati ad essi sono quelli assegnati dagli assiomi in cui entrano. Questo è il significato del famoso epigramma di Russell: la matematica pura è quella scienza in cui non sappiamo di cosa stiamo parlando o se ciò che stiamo dicendo è vero (Nagel & Newman 1993, 23s.).

La matematica come scienza puramente formale e la sostituzione della *coerenza* alla *verità* come criterio di validità degli asserti matematici

Ha ben ragione, dunque, Strumia, attento come noi a cogliere le differenze e le relazioni fra scienza moderna e metafisica classica, ad affermare che in tal modo la matematica raggiunge il suo punto di distanza maggiore dalla metafisica, ben oltre quello che già i Greci con Aristotele avevano intuito. Essa non ha più a che fare con la *verità* nel senso della denotazione extra-linguistica mentale e/o fisica degli asserti, ma semplicemente con la *coerenza* degli asserti stessi e quindi con la *consistenza** del *sistema formale** cui essi appartengono[12]. In tal modo la matematica viene sempre più ad

[12] Più esattamente la nozione logica di *verità* diventa puramente intra-linguistica, quella della *relazione semantica* fra metalinguaggio e linguaggio-oggetto nell'analisi formale di una teoria, come Hilbert ci insegnerà.

assomigliare alla *logica formale*, l'unica scienza che nella classicità ha a che fare non con il contenuto degli asserti, bensì con la *forma* di essi e dei ragionamenti e/o degli argomenti ad essi associati. Ovvero, degli argomenti costruiti a partire da tali asserti, se essi fungono da premesse di un ragionamento, o costruiti per arrivare ad essi, se sono conclusioni di un ragionamento.

Formalizzazione della matematica e nascita della logica matematica

Non è dunque casuale che la *logica matematica* come pura *logica simbolica assiomnatizzata* che si interessa della correttezza formale dei linguaggi (coerenza, consistenza) e non del loro contenuto veritativo extra-linguistico, malgrado preconizzata da Leibniz, si sia sviluppata solo dopo l'assiomatizzazione delle matematiche, alla fine del XIX secolo ad opera di Gottlob Frege (1848-1925), l'iniziatore della cosiddetta *svolta linguistica* della scienza e della filosofia moderne. Un'assiomatizzazione cominciata da Riemann con la sua assiomatizzazione della geometria a metà del XIX secolo, e proseguita dal matematico italiano Giuseppe Peano (1858-1932) con un'analoga assiomatizzazione dell'aritmetica alla fine del XIX secolo[13] e finalmente culminata con David Hilbert (1862-1943) con l'assiomatizzazione della geometria euclidea (Hilbert, 1899). Vi torneremo anche nel **Capitolo 3.**

Come accertare la coerenza degli asserti senza poterne accertarne prima la verità?

Ciò però poneva un problema di non facile soluzione. Come poter rendere conto con assoluta certezza della *coerenza* e quindi della *reciproca compatibilità* fra le affermazioni di una geometria come quella non-euclidea, assolutamente contro–intuitiva, se non c'è alcun mezzo di rendere conto della verità di certe affermazioni? Nella vecchia geometria euclidea il modo era semplice: dato che ci si poteva basare sull'evidenza intuitiva per giudicare della *verità* di certe affermazioni, siccome si supponeva che asserti veri fossero tra loro sempre compatibili[14], dalla verità evidente di essi

[13] Il sistema di Peano, che costituisce il primo esempio di una teoria matematica completamente assiomatizzata ed espressa esclusivamente nel linguaggio simbolico della nuova logica matematica, fu pubblicato per la prima volta nel 1889 negli *Arithmetices principia nova methodo exposita.* Il sistema formale proposto da Peano prendeva come *primitivi* i termini di «zero», «numero intero», «relazione di successione». Questi primitivi soddisfacevano (assumevano un «significato» per) i seguenti cinque assiomi: 1) Zero è un numero; 2) Se *n* è un numero, allora il successore di *n* è un numero; 3) Zero non è il successore di nessun numero; 4) Due numeri i cui successori sono uguali, sono essi stessi uguali; 5) Ogni proprietà di cui gode lo zero e il successore immediato di ogni numero che gode della proprietà data, appartiene a tutti i numeri (assioma di *induzione matematica infinita*). L'aritmetica ordinaria costituisce un *modello** di questo *sistema formale* che lo rende *vero* per quella particolare applicazione. Inversamente, il sistema formale di Peano costituisce un'assiomatizzazione dell'aritmetica ordinaria («diofantea»), anche se oggi, dopo Gödel, sappiamo trattarsi di un'assiomatizzazione necessariamente *incompleta*, vista l'esistenza di *aritmetiche non-diofantee*

[14] Oggi però, dopo Gödel, anche affermazioni di questo tipo non sono per nulla scontate, anzi tutt'altro. Vi torneremo.

si deduceva la loro reciproca compatibilità e quindi la *consistenza* del sistema. Questa strada non era però conciliabile con l'astrattezza contro-intuitiva della nuova matematica a base algebrica.

La soluzione di Riemann: creare un modello euclideo della sua geometria: la geometria dello spazio curvo

La soluzione trovata da Riemann, sebbene parziale dal punto di vista teoretico, logico–formale, perché apre la via all'uso di *metodi non–finitari* (non-costruttivi) di dimostrazione della verità e della coerenza dei *sistemi formali*, tuttavia ha avuto il gran merito di rendere la geometria non–euclidea accessibile anche all'intuizione, facendola uscire dall'aria rarefatta del formalismo algebrico puro, accessibile a pochi eletti. Più tecnicamente, Riemann ha proposto un *modello euclideo* della sua geometria non-euclidea ellittica — interpretazione estesa dal matematico italiano Eugenio Beltrami (1835-1900) anche alla geometria iperbolica di Lobacevskji — come *geometria dello spazio curvo*. Un modello in grado di dare un significato parziale ma intuitivo agli asserti del sistema formale considerato (in questo caso dei diversi sistemi formali considerati) e quindi in grado di rendere evidente anche la *coerenza* degli asserti paradossali, apparentemente assurdi, o controintuitivi di quel sistema[15].

Confronto intuitivo fra nozioni-base di geometria piana e curva

In questo modello euclideo viene data un'*interpretazione** di «piano» come superficie di una sfera e di «retta» come *cerchio massimo** di una sfera. In tal modo, si riportava la «coerenza» della geometria non–euclidea alla verità di quella euclidea e quindi alla supposta coerenza dei postulati di quella. Una soluzione che, ripetiamo, dopo Gödel, è molto discutibile, ma che ottiene un risultato non piccolo: quello di rendere intuitivamente «evidente» e fruibile anche dai non-matematici l'astrattezza delle geometrie non–euclidee. In tale modello, infatti la geometria ellittica di Riemann viene a corrispondere ad una geometria descritta sulla superficie a curvatura *positiva* della sfera euclidea, mentre la geometria iperbolica di Lobacevskji a quella descritta sulla superficie a curvatura *negativa* della (pseudo-)sfera euclidea.

---

[15] Questo metodo di dimostrazione di coerenza, per quanto formalmente parziale perché fondato su condizioni logicamente molto pesanti quali l'uso di metodi infinitari di dimostrazione, pur tuttavia ha una sua corrispondenza nella logica del linguaggio comune. Per rendere evidenti ragionamenti astratti è essenziale fare degli esempi. Immediatamente s'intuisce che il principio può valere per un numero indefinito (potenzialmente infinito) di casi analoghi, ovvero che formalmente posseggono la medesima *struttura**.

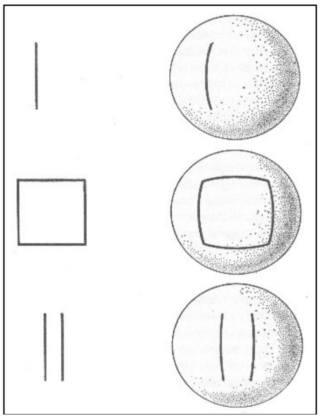

Figura 1-5. Due punti sul piano di Riemann (a sinistra) divengono due punti sulla sfera di Euclide (a destra); due rette parallele divengono due cerchi massimi; due segmenti paralleli divengono due archi di *cerchio massimo. Essi evidentemente, se prolungati, s'incontrano, contrariamente all'assioma delle parallele della geometria euclidea.**

Carattere intuitivo del modello euclideo della geometria di Riemann e della geometria di Lobacevskji

In questo modo alcuni asserti paradossali delle geometrie non-euclidee diventano immediatamente evidenti. L'asserto della geometria riemaniana che per un punto esterno ad una retta non può essere disegnata alcuna parallela alla retta data diviene immediatamente evidente, non appena si consideri che due segmenti paralleli sul piano di Riemann corrispondono a due archi di cerchio massimo di una sfera di Euclide. Essi, prolungati, evidentemente s'incontrano, contro l'assioma euclideo delle parallele (Cfr. Figura 1-5).

L'esempio della somma degli angoli interni del triangolo in Euclide, Riemann e Lobacevskji

Ugualmente l'asserto che la somma degli angoli interni di un triangolo è maggiore di 180° nella geometria ellittica di Riemann, o minore di 180° nella geometria iperbolica di Lobacevskji, diviene immediatamente evidente non appena essi vengano descritti invece che sul piano di Riemann o di Lobacevskji sulla superficie, rispettivamente a curvatura positiva e negativa della sfera di Euclide (Cfr. Figura 1-6).

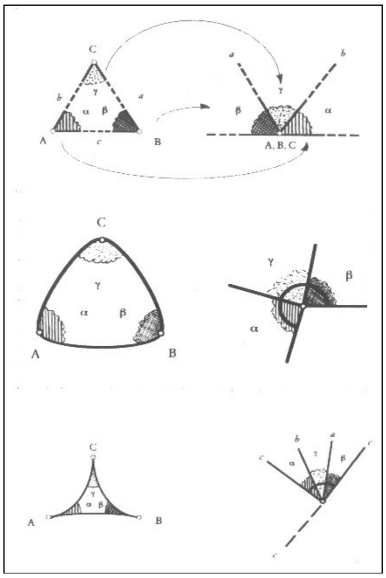

Figura 1-6. Descrizione intuitiva dei triangoli rispettivamente: sullo spazio piano euclideo (sopra), sullo spazio ellittico riemaniano (centro), sullo spazio iperbolico lobacevskjiano (sotto). Come si vede dalle proiezioni a fianco di ciascuna figura dei tre angoli costruiti sovrapponendo i lati contigui dei triangoli originali, nel primo caso la somma degli angoli interni è uguale a due retti (180°), nel secondo caso è maggiore di due retti, nel terzo è minore.

1.6 La nascita delle teorie degli insiemi e i fondamenti della matematica

1.6.1 La teoria non-assiomatica degli insiemi di Cantor e l'antinomia di Cantor

1.6.1.1 Metodo assiomatico come antidoto ai tranelli dell'evidenza e del relativismo

I limiti della dimostrazione indiretta mediante modelli della coerenza di un sistema formale

Già abbiamo accennato ai limiti della dimostrazione *indiretta* di coerenza delle geometrie non-euclidee mediante la costruzione di un modello euclideo di esse, come quella dello spazio curvo. Tale dimostrazione consiste infatti nel ridurre il problema della coerenza delle geometrie non–euclidee a quello della *verità intuitiva* (evidente) della geometria euclidea e quindi alla supposta coerenza della stessa.

Modelli infinitari e scoperta delle antinomie

D'altra parte, si potrebbe tentare una dimostrazione *diretta* della coerenza della geometria non-euclidea mediante tale modello, profittando della sua evidenza. Sfortunatamente, però, quando si ha a che fare, come nel nostro caso, con modelli infiniti e non finiti di un determinato sistema formale, il criterio di evidenza, ovvero il principio cartesiano delle «idee chiare e distinte», è soggetto a errori e contraddizioni — le cosiddette *antinomie logiche.* Esse emergono non appena si cerca di provare con *metodi costruttivi** la consistenza di siffatte teorie formali. Non appena, cioè, con gli asserti delle teorie matematiche, non ci si limita ad affermare semplicemente l'esistenza di certe entità, basandosi sulla supposta evidenza delle rispettive nozioni, ma si cerca sempre di definire, dimostrare o calcolare l'entità matematica supposta esistente, a partire da entità e/o operazioni *più semplici.*

Infinità e onnicomprensività *versus* finitarietà e costruttività

Il problema è che, come sapevano bene gli antichi, ma i moderni hanno dovuto re-imparare a loro spese, gli oggetti infiniti — soprattutto quelli «troppo infiniti» come sono necessari in una teoria sui fondamenti di una scienza con pretesa di *onnicomprensività*[16] rispetto al proprio oggetto e di *autonomia* assoluta rispetto ad altre forme di linguaggio e conoscenza —, sono inconciliabili con l'uso di metodi costruttivi. È assurdo, infatti, pensare di costruire «pezzo a pezzo» un oggetto infinito[17]. Torneremo nel **Capitolo 3,** quando tireremo le somme della moderna discussione sui fondamenti della matematica a base insiemistica e sulla delicata questione degli infiniti in matematica, nonché nel **Capitolo 5** quando tratteremo della questione dell'infinito in metafisica e teologia dal punto di vista della teoria tommasiana dell'*infinito attuale*.

---

[16] Tecnicamente, sono «troppo infiniti» gli insiemi con cardinalità paragonabile a quella di *V*, «la collezione universale» di tutti gli oggetti di un determinato universo di discorso. In pratica, ciò che oggi abbiamo imparato dopo i fallimenti di Cantor e di Russell, è che per una scienza, il rigore di un formalismo spinto, quale solo un approccio costruttivo può garantire, può essere usato solo con un sottoinsieme degli oggetti propri di quella scienza. Ovvero *limitando la dimensione degli insiemi costruibili*, degli insiemi cioè la cui esistenza può essere dimostrata, e non solo supposta mediante un apposito assioma (Cfr. (Hallett, 1996)).

[17] Così si è espresso Paul J. Cohen (1934-2007) nell'Introduzione al suo libro su *La teoria degli insiemi e l'ipotesi del continuo* (Cohen, 1966) che, a tutt'oggi, costituisce il capitolo fin ale finora scritto nella moderna teoria dei fondamenti della matematica a base insiemistica. Nei termini della scolastica aristotelica, è assurdo pensare di far passare completamente «in atto» un infinito «in potenza». Il che non significa affatto che per tale filosofia è assurda la nozione di «infinito attuale» *tout-court* così che tale nozione possa essere usata solo dalla teologia e da una «teologia negativa», di tipo mistico e non razionale. La dottrina dell'infinità attuale della scolastica è molto più ricca di queste semplificazioni. Ed anche se essa non può vantare il rigore e la ricchezza di nozioni e di metodologie che oggi, dopo Cantor, possiamo avere nell'affrontare il problema, è certo che i risultati cui siamo giunti non contraddicono quelli della scolastica tommasiana. Torneremo nel **Capitolo 5** su questo punto.

Infinitarietà e certezza basata sull'evidenza

D'altra parte, *dal punto di vista epistemologico,* il metodo dell'evidenza in quanto intrinsecamente infinitario, non garantisce «di fatto» *certezze universali*, come divenne chiaro alla riflessione epistemologica ottocentesca post-hegeliana, in particolare dopo i lavori di Wilhelm Dilthey (1833-1911) sul carattere eminentemente *storico-culturale* del principio di evidenza innanzitutto nelle scienze storiche.

L'inevitabile «dimensione tacita» della conoscenza basata sull'evidenza

Ovvero su quella che nel XX secolo il filosofo ed economista austro-ungherese Karl Polanyi (1886-1964) ha definito, rifacendosi direttamente a Dilthey, la *dimensione tacita* (=inconscia) della conoscenza, che è valida, ovviamente, anche nell'epistemologia delle scienze matematiche pure ed applicate (Polanyi, 1966). In altri termini, quando usiamo il principio di evidenza (= stato di coscienza) per definire il metodo della conoscenza scientifica come hanno fatto i moderni a partire da Descartes, Newton, Leibniz e Kant, è chiaro che ciò che appare *intersoggettivamente evidente* e quindi sufficiente per dimostrare la *validità* di una determinata teoria in una particolare epoca e/o contesto culturale non è affatto tale in un'altra epoca e/o contesto culturale.

Dimensione tacita dell'evidenza e relativismo culturale

La storia della scienza moderna ci ha fornito diverse prove di questo, come pure il multiculturalismo tipico della nostra epoca per quanto riguarda le altre discipline umanistiche, p.es., in etica, in ontologia, etc. Questo perché il tranello dell'evidenza consiste nel fatto che ciò che abbiamo portato a coscienza «esplicitato» come principio «indubitabile», necessario e sufficiente, per dimostrare la validità di una qualsiasi teoria appare tale solo nel contesto culturale di chi condivide *inconsciamente* o *tacitamente* un numero *indefinito* di altre supposizioni non esplicitate, al di là del numero necessariamente *finito* di quelle esplicitate (evidenti) mediante assiomi. Ovvero, l'indubitabilità della conoscenza basata sull'evidenza è *solo* per chi condivide la stessa «dimensione tacita» della conoscenza. Per chi invece appartiene ad altri contesti storici e socioculturali queste premesse risulteranno tutt'altro che evidenti e la razionalità/validità della teoria risultante tutt'altro che indubitabile. È qui la radice del *relativismo culturale* e quindi del *nihilismo* che ci affligge.

Il metodo assiomatico come antidoto al relativismo

Le scienze logiche e matematiche per questo hanno abbracciato, fin dalla metà del secolo XIX, innanzitutto con Riemann come abbiamo visto in § 1.5.2 il *metodo assiomatico della formalizzazione* che evita i tranelli dell'evidenza e garantisce l'universalità di quanto provato alla luce degli assiomi e delle regole di inferenza *definite*, allo stesso tempo e per ciò stesso *definendone rigorosamente i limiti di validità*. Ovvero garantisce che chiunque partirà dagli stessi assiomi e regole di inferenza arriverà «sempre e ovunque» ai medesimi risultati. In questo modo, se si è interessati a dimostrare altro, sarà sufficiente cercare gli assiomi e le regole necessari e sufficienti a provarlo, a prescindere dalla diversità delle *convinzioni e/o opinioni* personali o di gruppo.

Metodi infinitari e intuizione intellettuale

Ecco perché quando oggi in epistemologia si parla di *metodi infinitari* ci si sta riferendo essenzialmente a quelli basati sulla cosiddetta *intuizione intellettuale* di oggetti infiniti intesa come *primitivo* soggiacente a qualsiasi necessariamente parziale assiomatizzazione, propria della tradizione «platonica» in ontologia della matematica – da Gödel (Gödel, 1954; 1964), a Fraenkel (Fraenkel, 1953; 1966), ad Husserl (Husserl, 1929) e alla fenomenologia – ma criticata da Heidegger in nome del carattere storico dell'evidenza stessa (Heidegger, 1927; 1954) – e, viceversa, quando si parla di *metodi finitari* ci si sta riferendo a quelli *costruttivi, algoritmici* basati sull'assiomatizzazione e la formalizzazione, come sappiamo, oggi estendibile anche alla *filosofia formale* con tutti i distinguo necessari[18].

1.6.1.2 L'approccio costruttivista di Cantor ai fondamenti della matematica

Il problema dell'infinito nelle matematiche

Il tentativo di Cantor di un'analisi costruttiva dei fondamenti della matematica

Tornando al nostro *excursus* storico sulla fondazione della matematica moderna e del calcolo, innanzitutto, la questione dei fondamenti della matematica s'impose con urgenza a partire dalla seconda metà del secolo scorso, proprio per la straordinarietà delle scoperte fatte, che sconvolgevano certezze sedimentate in millenni e delle quali noi abbiamo accennato solo alla più sconvolgente, la scoperta delle geometrie non-euclidee. Fu il matematico tedesco Georg Cantor (1845-1918) il primo che cercò, con grande onestà intellettuale, di affrontare con *metodo costruttivo* esteso però anche ad *oggetti infiniti* – e qui come vedremo sarà il suo limite – il problema di una ri–fondazione della matematica dopo i terremoti intellettuali dei primi cinquant'anni del secolo XIX. E lo fece «prendendo il toro per le corna», affrontando direttamente il problema dell'*infinità attuale* che, secondo un classico pregiudizio moderno legato ad un'interpretazione realista del calcolo infinitesimale, sembrava indispensabile per poter garantire quella consistenza *incondizionata* o «assoluta» delle teorie matematiche — ed in particolare della «regina» della matematica moderna: *l'analisi*

[18] Cfr. il bellissimo saggio del matematico brasiliano Newton C. A. Da Costa (1929-) -- famoso per i suoi fondamentali lavori sulle *logiche para-consistenti* –, in difesa della necessità dei *metodi infinitari* basati sull'intuizione intellettuale, data la necessaria incompletezza dei metodi finitari per provare la consistenza degli asserti matematici, sia nella matematica pura che nella matematica applicata alla fisica (Da Costa, 2011).

matematica, nella sua forma aritmetizzata (l'aritmetica dei numeri *reali*)[19] dovuta a Dedekind e Weierstrass.

L'assiomatizzazione della nozione di limite

Karl Weierstrass (1815-1897), d'altra parte, attraverso la sua famosa formalizzazione della nozione di *limite* usando *la relazione* $\varepsilon - \delta$ introdotta per la prima volta da Augustin-Louis de Cauchy (1789-1857) – che è il modo oggi normalmente insegnato per definire la nozione di limite e che è definita sui *numeri reali* [20] –, suggerì l'inutilità di usare la classe dei *numeri infinitesimi* come un'ulteriore classe numerica per giustificare il calcolo e l'analisi, allo stesso tempo evidenziando la necessità di una giustificazione dell'insieme dei numeri reali.

L'assiomatizzazione della nozione di infinitesimo nell'analisi non-standard

D'altra parte, il pregiudizio dell'interpretazione *realista* degli infinitesimi come necessaria alla giustificazione dell'analisi era già stato criticato da Leibniz nella sua fondazione del *calcolo differenziale*, ma solo lo sviluppo nel XX secolo di una matematica ed una logica *intuizioniste* ad opera del matematico e filosofo olandese Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966) e quindi di un'*analisi non-standard* ad opera di Abraham Robinson (1918-1974) ricevette nel 1966 una rigorosa formalizzazione assiomatica (Robinson, 1974), reintroducendo di diritto la nozione di numero infinitesimo ed i numeri infiniti nella loro interpretazione leibniziana all'interno della matematica moderna. Gödel in particolare, dopo aver dimostrato l'equi-consistenza della matematica intuizionista con quella classica (Gödel, 1933), salutò con particolare enfasi il risultato di Robinson.

L'alta considera zione di Gödel per l'analisi non-standard nella sua lettura platonica

Egli, allora, con il permesso di Gödel stesso, inserì il seguente passaggio di una conferenza di Gödel sull'analisi non-standard nella *Prefazione* alla seconda edizione del suo testo fondamentale sull'analisi non-standard. Gödel, infatti, affermava che «vi sono buone ragioni per credere che l'analisi non-standard, in una qualche versione o altra, *costituirà l'analisi del futuro*». Infatti, essa colma un *gap* nella matematica moderna per cui «la prima

---

[19] Ovvero, i punti del continuo geometrico possono essere messi in corrispondenza biunivoca (isomorfismo) con (l'insieme de) i *numeri reali,* ovvero con l'insieme che include l'insieme dei *naturali* (interi *positivi* maggiori di 0)*,* degli *interi* (positivi e negativi)*,* dei *razionali* (decimali con coda decimale finita e/o periodica), degli *irrazionali* (decimali con coda decimale infinita aperiodica) e dei *trascendenti* (irrazionali che non sono soluzioni di polinomi algebrici, come π).

[20] Sia f una funzione definita su un sottoinsieme D dei numeri reali, sia c un punto-limite di D e sia L un numero reale, allora $\lim_{x \to c} f(x) = L$. Se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che per tutti gli $x \in D$, se $0 < |x - c| < \delta$, allora $|f(x) - L| < \varepsilon$. Simbolicamente: $\lim_{x \to c} f(x) = L :\Leftrightarrow ((\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, 0 < |x - c| < \delta) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$.

teoria esatta degli infinitesimi ha visto la luce trecento anni dopo l'invenzione del calcolo differenziale» ad opera di Leibniz (Robinson, 1974, p. xvi)[21].

Il carattere pionieristico della TI di Cantor

Se questo è il risultato finale della discussione matematica moderna sulla nozione di infinito e di infinitesimo in matematica, spetta a Georg Cantor aver per primo affrontato la questione nella sua proposta di usare la *teoria degli insiemi* come *metalinguaggio* della matematica, in una versione *non-assiomatica* e per questo impropriamente definita «ingenua» della TI medesima. Proprio per risolvere le antinomie che teorie non-assiomatiche degli insiemi (Cantor) e delle classi (Frege: cfr. § 1.6.2) nella fondazione di oggetti infiniti inevitabilmente recano con sé, vennero sviluppate nel XX sec. le *teorie assiomatiche degli insiemi* per garantire assiomaticamente e non costruttivamente l'esistenza (logico-matematica) di *collezioni infinite*.

In ogni caso, ecco come Cantor stesso impostava il problema mostrando come la questione dell'infinito emergeva dall'interno medesimo del *calcolo* e dell'*analisi matematica* e quindi della stessa nozione di *funzione* (definita sui numeri reali) e quindi alla nozione di *continuo* in geometria:

> Non vi è dubbio che noi non possiamo fare a meno di quantità *variabili* nel senso *dell'infinito potenziale* e da questo può essere dimostrata la necessità dell'*infinito attuale*. Affinché vi sia una quantità variabile in una teoria matematica, il «dominio» della sua variabilità dev'essere strettamente parlando conosciuto in anticipo attraverso una definizione. Comunque, questo dominio non deve essere a sua volta qualcosa di variabile, altrimenti qualsiasi base fondata per lo

---

[21] Il riferimento di Gödel a «diverse forme di analisi non-standard» acquista un particolare rilievo quando si tenga presente la cosiddetta interpretazione *sintattica* dell'analisi non-standard sviluppata a Princeton dal matematico americano Edward Nelson (1932-2014) mediante la sua *teoria interna degli insiemi* (*Internal Set Theory*) (IST) che fornisce un'assiomatizzazione dell'analisi non-standard senza dover presupporre che essa richieda l'introduzione «*dall'esterno* della sintassi del linguaggio insiemistico *ordinario*» di un oggetto come l'insieme *I* degli infinitesimi in quanto sotto-insieme dei reali cui le formule sintatticamente ben formate dell'analisi non-standard si riferiscano (Nelson, 1977; 2014). In altri termini, mentre Gödel difende un interpretazione *semantica* della nozione di infinitesimo dell'analisi non-standard, congruente con la sua ontologia *logicista* della matematica che platonicamente riserva un ruolo costitutivo dell'intuizione intellettuale nel suo riferirsi a *oggetti infiniti* «esterni» alla sintassi del linguaggio matematico sebbene essi non possono essere provati usando metodi finitari, come i *teoremi di incompletezza* dimostrano (Gödel, 1954; 1964), l'interpretazione *sintattica* dell'analisi non-standard di Nelson è perfettamente congruente con la sua rigorosa ontologia *formalista*. Essa, infatti, nega ogni valore semantico o «rappresentazionale» di oggetti delle proposizioni consistenti del linguaggio matematico nel senso di referenza a oggetti «esterni» alla sintassi del linguaggio matematico medesimo (Nelson, 2002). Torneremo nel **Capitolo 3** sulla questione dell'ontologia degli oggetti matematici dopo il punto di svolta dei teoremi di incompletezza di Gödel che hanno posto la parola «fine» alla questione dei fondamenti nella matematica moderna.

> studio della matematica verrebbe meno. Quindi questo dominio è un insieme di valori definito, *attualmente infinito* (Cantor 1886, 9).

La scoperta di Cantor delle antinomie, nel suo tentativo di formulare una teoria esclusivamente costruttiva degli insiemi.

Cantor affrontò il suo compito costruttivo con una nozione eccezionalmente semplice, quanto comprensiva per tutte le diverse scienze matematiche che era la sua definizione di *insieme*[22]. Se infatti non si potevano più considerare come autoevidenti le nozioni fondamentali della matematica (p. es., i concetti di numero, di figura, di funzione…) la strada era quella di dimostrarli a partire da una nozione molto più semplice, quella appunto di *insieme* (*Menge,* in tedesco). Intuitivamente, infatti, come suggerito già da Weierstrass, un numero può essere definito come insieme *coerente* di unità, una figura geometrica come insieme *coerente* di punti, una funzione come relazione fra *insiemi ordinati* in base a una *relazione di ordinamento* ($\leq$) e quindi a una *metrica,* etc. Ora, sebbene la teoria di Cantor risultò eccezionalmente feconda per numerose scoperte sui fondamenti della matematica ed in particolare sulla nozione tripartita di *infinito* («potenziale», «transfinito» e «attuale») in matematica, essa si scontrò, inevitabilmente, con insanabili antinomie. Ma andiamo per gradi.

1.6.1.3 Il carattere non-assiomatico o "ingenuo" della teoria di Cantor

Le teorie assiomatiche degli insiemi e il metodo ipotetico-deduttivo esteso ai fondamenti della matematica

La TI di Cantor è definita «ingenua» perché «non-assiomatica», in quanto non supponeva altri assiomi oltre il *principio di non-contraddizione* (p.n.c.) per giustificare in maniera consistente l'esistenza di insiemi. In altri termini, la teoria degli insiemi di Cantor proprio per non usare assiomi che si aggiungano al p.n.c. per giustificare la consistenza della teoria stessa, non è una teoria *ipotetico-deduttiva* sui fondamenti, ma una teoria con una pretesa di *fondazione assoluta* (apodittica) delle matematiche, ed è qui, come vedremo il suo limite. Infatti, proprio perché la teoria cantoriana degli insiemi porta a insanabili antinomie, le teorie successive degli insiemi sono tutte «assiomatiche» e quindi «ipotetico-deduttive», in quanto solo con l'aggiunta di ulteriori assiomi (ipotesi) si può garantire la consistenza della teoria.

Il concetto di insieme cantoriano basato sul p.n.c.

Ecco, dunque, due testi di Cantor riportati nella sintesi offerta da me in un mio saggio dedicato alla questione dei fondamenti dal punto di vista metalogico e metafisico (Basti, 1966), saggio che utilizzeremo molto nella nostra ricostruzione del pensiero cantoriano. La prima citazione rilevante da sottolineare è contenuta nel saggio di Cantor del 1887-88 sui *numeri transfiniti*, *Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten I, II* (Cantor, 1932):

[22] Non è qui il luogo per approfondire la teoria cantoriana degli insiemi. Rimando a una trattazione più approfondita in (Basti & Perrone 1996) e, soprattutto (Hallett 1984).

> Quando la totalità degli elementi di una molteplicità può essere pensata senza contraddizione come «un essere insieme» cosicché la loro collezione in «una sola cosa» è possibile, io la definisco una molteplicità consistente o un insieme (Cantor, 1932, p. 443).

La radice platonica del concetto cantoriano di insieme

Come si vede, il fatto di non includere alcun assioma oltre il p.n.c. per garantire l'esistenza di un insieme evidenzia il platonismo della teoria come tentativo di una fondazione *incondizionata* senza ipotesi (assiomi) aggiuntive della matematica (e della logica) basata sulla nozione di «insieme». Ed ecco un altro testo di Cantor tolto dal medesimo saggio in cui diviene ulteriormente chiaro il fondamento platonico della nozione di «totalità insiemistica» basata su un atto di «intuizione intellettuale». Quello per cui nella tradizione platonica l'uomo diviene capace di conoscere l'*universale logico* (*unum versus alia*), l'*eidos* platonico, nella sua «*unicità* formale» irriducibile, in quanto distinta dall' «*unità* quantitativa» replicabile, iterabile» della «*molteplicità* quantitativa» (di Democrito: cfr. **Capitolo 5**) del numero cardinale associato a quell'insieme, che nell'insiemistica cantoriana diventa la «cardinalità» o «potenza» di un dato insieme:

> Sia *M* un dato insieme pensato come una *cosa* esso stesso, e consistente di cose concrete, definite e ben differenziate o di concetti astratti che sono chiamati gli elementi dell'insieme. Se noi astraiamo non solo dalla *natura* degli elementi, ma anche dall'*ordine* in cui essi sono dati, allora nasce in noi un concetto generale definito (*universale, unum versus alia*), con il significato: *unum aptum inesse multis* (uno capace di essere in molti), che io chiamo *potenza* di *M* o numero cardinale appartenente a *M* [cardinalità di *M, N.d.R*] (Cantor, 1932, p. 411).

Il carattere platonico non-ipotetico della TI di Cantor

La centralità della nozione insiemistica di «numero» e quindi della «aritmetica» estesa anche ai numeri reali e non solo naturali in Cantor è dunque ben diversa da quella scoperta da Hilbert nel suo lavoro sui fondamenti della geometria citata in precedenza (Hilbert, 1899). Mentre in Hilbert l'aritmetica ha una fondazione puramente «sintattica» e «algebrica» radicalmente antiplatonica consistente col suo «programma formalista *finitistico* (algoritmico)» ai fondamenti della matematica su cui torneremo nel **Capitolo 3**, in Cantor l'aritmetica ha una fondazione contenutistica «formale e *non-formalista*», radicalmente «infinitistica», consistente con l'ontologia platonica dell'ente logico e matematico.

1.6.1.4 I tre capisaldi della teoria di Cantor e la sua nozione tripartita di infinito

Tre sono i capisaldi dell'approccio cantoriano «non assiomatico» e quindi «platonico» alla teoria degli insiemi in matematica (Basti, 1966, pp. 179-201):

Tre capisaldi della TI di Cantor: 1. Teorema di Cantor

1. Innanzitutto, quello che va sotto il nome di *Teorema di Cantor,* ovvero l'approccio «costruttivo» o «induttivo» all'esistenza di insiemi in base al principio che ogni insieme è sotto-insieme del suo «insieme-potenza».

2. Enumerabilità degli insiemi infiniti dei razionali e degli interi e non-enumerabilità degli irrazionali e dunque dei reali che li includono: l'ipotesi del continuo di Cantor

2. Secondariamente, l'altro teorema quello della *enumerabilità di insiemi infiniti* usando il procedimento algebrico e assolutamente controintuitivo della dimostrazione dell'essenziale «isomorfismo» fra tutti gli insiemi numerabili (quello dei «razionali» $\mathbb{Q}$, degli «interi» (positivi e negativi) $\mathbb{Z}$ e dello stesso insieme di tutti gli insiemi «numerabili» $\mathbb{U}$) perché possono essere tutti posti in «corrispondenza biunivoca» (*isomorfismo*) e dunque «contati» con l'«insieme dei naturali» $\mathbb{N}$. Di qui la «definizione positiva» di «insieme attualmente infinito» che Cantor offre per la prima volta nella storia del pensiero, per la quale «un insieme infinito è quello che può essere posto in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio», cosa che non può essere vera per qualsiasi insieme finito. Infatti, $\mathbb{N}$ è sottoinsieme proprio di $\mathbb{Z}$ che è a sua volta è sottoinsieme proprio di $\mathbb{Q}$. Per lo stesso teorema Cantor dimostrò la «non-numerabilità» dell'insieme dei «reali» $\mathbb{R}$ – perché dato dall'unione di due insiemi «disgiunti» senza, cioè, elementi in comune: l'insieme dei «razionali» $\mathbb{Q}$ e degli «irrazionali» $\mathbb{I}$ – quei numeri cioè che, diversamente dai razionali, non possono essere espressi attraverso una frazione – nella misura in cui essi includono i cosiddetti *numeri trascendenti,* ovvero quei numeri irrazionali che non sono soluzioni di equazioni algebriche[23]. Ovvero, in simboli: $\mathbb{R} \coloneqq \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$. Di qui, come vedremo, dato il Teorema di Dedekind, nasce la cosiddetta *ipotesi del continuo* di Cantor.

---

[23] I due più conosciuti numeri trascendenti sono due costanti che ricorrono in un'infinità di formule matematiche. π, conosciuto anche alla matematica greca (Archimede) perché definisce il rapporto fra la circonferenza e il suo raggio, ed *e,* il cosiddetto «numero di Eulero» che è la base della funzione esponenziale e^x e quindi del «logaritmo naturale» $\log_e x$. Esso si definisce in maniera equivalente, sia come limite infinito della successione $\lim_{n\to\infty}\left(1 + {}^{1}/_{n}\right)^n$, sia più intuitivamente come $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$ dove *n*! è il fattoriale del numero naturale *n.* Si deve precisamente a Cantor nel suo saggio del 1874 (Cantor, 1874, pp. 258-262) la dimostrazione definitiva dell'esistenza e della non-numerabilità dei numeri trascendenti, che è alla base dell'altra dimostrazione successiva della non-numerabilità dei reali. Ricordiamo che con il fattoriale di un numero naturale *n* si definisce il prodotto dei numeri interi positivi minori o uguali ad *n.* Ovvero, $n! \coloneqq \prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n-1) \times n$. Dato per convenzione che $0! \coloneqq 1$, il fattoriale di 3 è $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$, quello di 6 è $6! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$, ma già solo quello di 7 è $7! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 = 5.040$, quello di 10 è $10! = 3.628.800$, quello di 15 è addirittura $15! = 1.307.674.368.000$, un numero dell'ordine delle migliaia di miliardi (bilioni)!

3. La nozione dell'infinito attuale transfinito e i tre tipi di infinito

3. In terzo luogo, per la retta comprensione dell'infinito attuale cantoriano, è fondamentale considerare l'aspetto più costruttivo della sua teoria degli insiemi e cioè

> La sua positiva considerazione dell'infinito attuale *transfinito*. Questa nozione ci introdurrà immediatamente nella considerazione dell'antinomia dell'insieme-potenza, preziosissima controprova per Cantor che l'Assoluto non può essere pensato come un insieme ordinario (Basti, 1966, p. 186).

La TI di Cantor e l'inconsistenza dell'antinomia cosmologica di Kant

Dal punto di vista della storia della filosofia moderna – come noto nel suddetto saggio a commento del brano appena citato, riportando il pensiero di Lucio Lombardo Radice (1916-1982) nel suo agile ma profondo libretto *L'Infinito* (Lombardo-Radice, 2014) – il più grande contributo chiarificatore derivato dalla teoria cantoriana del transfinito è quello di aver dimostrato l'inconsistenza delle cosiddette «antinomie cosmologiche» della *Ragion Pura* di Kant, basate sull'erronea convinzione che «il limite del finito è l'Assoluto». Cantor ha dimostrato – e questo è un contributo che rimarrà per sempre nella storia del pensiero – che fra il finito e l'infinito attuale Assoluto esistono diversi (infiniti) *gradi di infinito attuale transfinito*, sebbene, e questo è il limite della teoria cantoriana del transfinito, il suo tentativo di giustificazione di una «teoria dei tipi ordinali» o «gradi» del transfinito che avrebbe come limite superiore di questa «induzione transfinita», il *transfinito ordinale assoluto* Ω al di là del quale c'è solo *l'Assoluto non-insiemistico* perché *Assolutamente Semplice e Apofatico* (= «indicibile» nella sua Essenza) del Divino, porta a un'insanabile antinomia.

L'antinomia di Cantor e il suo superamento mediante le teorie assiomatiche (=ipotetiche) degli insiemi

Come vedremo nel **Capitolo 3**, lo sforzo sistematico di tutte le teorie successive a Cantor, è quello di rendere consistente la preziosissima teoria dell'induzione transfinita nella TI mediante l'aggiunta di opportuni assiomi. Un fine perseguito e raggiunto innanzitutto da John Von Neumann attraverso la sua fondazione assiomatica e quindi ipotetico-deduttiva di una «gerarchia cumulativa» di transfiniti ordinali, e che viene ripresa anche se in forme diverse da tutte le successive teorie assiomatiche degli insiemi, quella di Zermelo-Fraenkel (**ZF**) e poi quella di Von Neumann-Bernays-Gödel (**NBG**), innanzitutto.

Per accennare a tutto questo, seguendo sempre la sintesi nel già citato capitolo quinto del saggio (Basti, 1966), vediamo i tre punti qualificanti della teoria costruttiva non-assiomatica degli insiemi di Cantor, appena ricordati.

L'esistenza degli insiemi provata costruttivamente mediante *il Teorema di Cantor*

1. *Teorema di Cantor*. La teoria non-assiomatica degli insiemi di Cantor nel suo aspetto *costruttivo* dipende dal potente *teorema di Cantor* per cui ogni insieme A esiste come sotto-insieme del suo *insieme-potenza* $\mathcal{P}A$, ovvero l'insieme di tutti i sotto-insiemi di A costruibili combinando *gli elementi di* A. Se dunque la cardinalità (= il numero degli elementi) di A è n, la cardinalità di $\mathcal{P}A$ sarà 2^n.

Per esempio, dato un insieme A con $n = 4$: $\{a, b, c, d\}$, esso può essere considerato come sottoinsieme dell'insieme-potenza di $A, \mathcal{P}A = B$, la cui cardinalità sarà $2^4 = 16$. B sarà composto cioè da sottoinsiemi costituiti da tutte le combinazioni possibili degli elementi di A: nessuno, a uno a uno, a due a due, a tre a tre, e, infine, a quattro a quattro. Ovvero: $\{\{\varnothing\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d\}\{a, b, c, d\}\}$, in totale 16 elementi (sottoinsiemi), fra i quali, da ultimo, si trova il nostro insieme di partenza, di cui così abbiamo dimostrato *costruttivamente* l'esistenza. Ovviamente, a sua volta, il nostro insieme potenza, B composto di 16 elementi sarà sottoinsieme del suo insieme-potenza $\mathcal{P}B = C$, nel nostro caso con una cardinalità di 2^{16} elementi, e così via *ricorsivamente* all'infinito…

Esiste, dunque, uno stretto rapporto fra la nozione di insieme e quella di oggetto matematico, *costitutivamente* e non solo *intuitivamente*.

- *Intuitivamente,* tale relazione esiste perché ogni oggetto geometrico può considerarsi come un insieme connesso di punti e/o ogni numero un insieme unitario di unità. Questa intuizione fu all'origine dell'idea di usare la teoria degli insiemi come *metalinguaggio* delle teorie matematiche.
- *Costitutivamente,* tale relazione esiste perché fra ogni coppia di grandezze geometriche e/o numeriche esiste una relazione di *maggiorazione / minorazione* $>/<$ fra grandezze, esattamente come fra gli insiemi, in quanto costruiti attraverso il Teorema di Cantor, esiste un'intrinseca relazione di *ordinamento* $\succ/\prec$ che presiede alla relazione di *inclusione* $\subseteq$ fra insiemi.

Enumerabilità di insiemi infiniti e la cardinalità del numerabile $\aleph_0$

2. *Enumerabilità di insiemi infiniti.* L'altro fondamentale risultato di Cantor riguarda proprio gli insiemi infiniti. Infatti, attraverso il suo *metodo matriciale* Cantor poté dimostrare dei risultati a quel tempo sorprendenti circa la *numerabilità degli insiemi infiniti*, ovvero circa gli insiemi che possano essere posti in *corrispondenza biunivoca* e quindi risultare *isomorfi* e dunque *equivalenti* o *equipotenti* – aventi cioè la medesima cardinalità – dell'insieme dei *numeri naturali* $\mathbb{N}$. Vediamo più precisamente questo punto.

Il metodo matriciale (algebrico) di Cantor per enumerare insiemi infiniti

In base alla nozione di «cardinalità» di un insieme, finito o infinito che sia, ma che in caso di insiemi infiniti Cantor preferisce definire «potenza» di un insieme, egli poté dimostrare dei fondamentali teoremi che riguardano la possibilità di una «trattabilità attuale» nel senso di «enumerabilità» di insiemi infiniti. Quando due insiemi hanno la medesima cardinalità o potenza essi vengono definiti da Cantor *equipotenti*. Così con un semplice procedimento algebrico usando delle matrici egli poté dimostrare l'equipotenza degli insiemi infiniti dei razionali e degli interi $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ con l'insieme infinito $\mathbb{N}$ dei naturali $\{0,1,2,\ldots,n,\ldots\}$, l'insieme del *numerabile,* proprio perché esiste una trasformazione (funzione) in grado di mettere in corrispondenza biunivoca («contare») ciascuno di questi insiemi con l'insieme $\mathbb{N}$. Essi avranno, perciò, tutti la stessa *potenza del numerabile* ovvero lo stesso numero cardinale infinito di elementi che Cantor denotò col simbolo $\aleph_0$ «aleph-zero», che, come vedremo subito, corrisponde al *primo ordine di transfinito.* Per esempio, col procedimento matriciale di Cantor è possibile dimostrare che l'insieme $\mathbb{Z}$ degli interi (positivi e negativi) è equipotente con quello dei naturali $\mathbb{N}$ malgrado ciò sia altamente controintuitivo (i naturali infatti sono dati dallo 0 e da tutti gli interi positivi), come evidenziato dal seguente grafico di relazioni:

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
0 \rightarrow & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & & \boldsymbol{n} & \\
& \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & & \nearrow & \downarrow & \nearrow \\
& -1 & & -2 & & -3 & & -4\ldots & & & -\boldsymbol{n} &
\end{array}
$$

Figura 1-7. Grafico della corrispondenza biunivoca (isomorfismo) fra l'insieme $\mathbb{N}$ dei naturali (prima riga) e quello degli interi $\mathbb{Z}$ (seconda riga). Da (Basti, 1966, p. 182).

Definizione di insieme infinito come ciò che può essere posto in corrispondenza biunivoca (isomorfo) con un suo sottoinsieme proprio

Con lo stesso procedimento è possibile dimostrare l'equipotenza anche dei razionali $\mathbb{Q}$ con i naturali $\mathbb{N}$ e dello stesso insieme di tutti i numerabili $\mathbb{U}$ con i naturali $\mathbb{N}$. Allo stesso tempo, tutto questo offrì per la prima volta nella storia del pensiero matematico la possibilità di definire un *insieme infinito* come quell'insieme che può essere posto in corrispondenza biunivoca con una sua *parte (sottoinsieme) propria(o).* Per esempio, se prendiamo l'insieme dei numeri quadrati di altri numeri naturali, è evidente che, se prendo un insieme *finito* di naturali il sottoinsieme dei numeri quadrati di quei numeri, i due insiemi non sono equipotenti: i numeri quadrati sono certamente di meno.

La non-numerabilità dell'insieme dei reali

Viceversa, se consideriamo l'insieme *infinito* dei naturali, è evidente che i due insiemi sono *equipotenti* visto che per ogni naturale esiste il suo quadrato. La novità di Cantor è che, mediante il formalismo matriciale di Cantor, viene definita una procedura generale per definire l'eventuale equipotenza fra insiemi numerici infiniti. Cantor stesso anticipò poi il risultato della *non-numerabilità* dei numeri reali $\mathbb{R}$ dimostrando in maniera definitiva in un suo fondamentale lavoro già citato alla nota 23 l'esistenza e la non-numerabilità dei numeri irrazionali *trascendenti* (p.es., π, ed e, il «numero di Eulero», per citare i più conosciuti) proprio perché non sono soluzioni di equazioni algebriche come gli altri irrazionali scoperti già dai greci, p.es., $\sqrt{2}$ o $\sqrt{3}$. Siccome l'insieme dei reali $\mathbb{R}$ è dato dall'unione (somma) degli *insiemi disgiunti* (senza elementi in comune) dei razionali $\mathbb{Q}$ (che includono gli interi $\mathbb{Z}$ e i naturali $\mathbb{N}$) e degli irrazionali $\mathbb{I}$ (trascendenti inclusi), cioè $\mathbb{R} \coloneqq \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$, anche i reali risulteranno non-numerabili – non è possibile, cioè, dimostrare l'isomorfismo e dunque la corrispondenza biunivoca fra $\mathbb{R}$ e $\mathbb{N}$.

Altri insiemi non-numerabili

Ma soprattutto, ripeto, col suo metodo diagonale Cantor ottenne la dimostrazione che *l'insieme dei reali* $\mathbb{R}$ *è non-numerabile* (Cantor, 1891)[24]. Di qui la dimostrazione che i punti dell'intervallo aperto $(0,1) \in \mathbb{R}$ è non-numerabile, e quindi ha una potenza superiore a quella dell'intero insieme $\mathbb{Q}$ dei razionali. Come pure lo sono gli *irrazionali* (ovvero, l'insieme dei reali escluso quello dei razionali, cioè $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, altrimenti $\mathbb{R}$ sarebbe numerabile), che perciò hanno la medesima potenza di $\mathbb{R}$, come lo hanno anche l'insieme dei numeri *complessi* $\mathbb{C}$, ovvero l'insieme-unione dell'insieme dei *reali* $\mathbb{R}$ con quello degli *immaginari* $\mathbb{I}$: $\mathbb{C} = \mathbb{R} \cup \mathbb{I}$. Significativamente, anche «d'insieme di tutti i sottoinsiemi dei naturali» e «d'insieme di tutte le infinite sequenze di numeri naturali» sono *non-numerabili.*

1.6.1.5 L'ipotesi del continuo e i tre tipi di infinito

Enumerabilità di insiemi infiniti e l'indimostrabile «ipotesi del continuo»

Da tutto questo, deriva l'*«ipotesi del continuo»* formulata da Cantor stesso (Cantor, 1891) che Cantor stesso cercò inutilmente di dimostrare per tutto il resto della sua vita – un fallimento che, come i biografi concordano fu una delle origini alla base della sua depressione e della conseguente malattia mentale che lo affliggerà negli ultimi anni della sua vita. Ovvero, denotata con $\aleph_0$ la *potenza del numerabile,* la *potenza del continuo,* denotata come $2^{\aleph_0}$, costituisce secondo questa ipotesi la potenza *immediatamente successiva* a quella del numerabile.

---

[24] Intuitivamente, immaginiamo di porre sulle righe di un'unica matrice tutte le sequenze di razionali numerate rispetto alla sequenza dei naturali posti in colonna. Se prendessimo ora la sequenza di cifre generata tirando una diagonale che prende una cifra per ciascuna delle sequenze di razionali sulle righe otterremmo una nuova sequenza che non è certamente un razionale, ma un irrazionale, visto che tutti i numeri con code decimali periodiche stanno sulle righe (=razionali), mentre il numero così ottenuto avrebbe coda decimale aperiodica (=irrazionale). Viceversa, se facessimo lo stesso con i reali, otterremmo mediante la diagonale un nuovo numero reale. Ora, se ponessimo il nuovo numero reale su una nuova riga della matrice e ripetessimo la procedura diagonale, ne otterremmo un altro e così indefinitamente. Con il che si dimostra che l'insieme dei reali ha una potenza maggiore del numerabile.

Il prezioso contributo di Cantor alla definizione rigorosa di «infinito attuale».

In ogni caso, per concludere, le dimostrazioni di Cantor costituiscono una prova della trattabilità della nozione di *infinito attuale* da parte della logica e della matematica, dirimendo così un incredibile cumulo di sciocchezze dette al riguardo nella storia del pensiero antico e moderno, in particolare riguardo al trattamento della questione dell'infinito attuale da parte del pensiero aristotelico.

La rilevanza anche metafisica della nozione di infinito attuale

Per questo, torneremo nel **Capitolo 5** sul trattamento della nozione di infinito attuale da parte di Cantor e di Tommaso, per la rilevanza della questione anche in metafisica, e non solo in matematica, visto che Cantor stesso ambiva ad applicare il suo trattamento sull'infinito non solo in matematica, ma anche in metafisica e in teologia. Anticipando così quell'esigenza di formalizzazione non solo del pensiero matematico, ma anche filosofico che oggi sembra aver trovato il suo soddisfacimento, anche se non nell'ambito della TI (ma della TC), come già abbiamo anticipato nell'**Introduzione** e vedremo ancora nel **Capitolo 3**.

Impossibilità di una teoria costruttiva degli infiniti

In ogni caso, è proprio nel *trattamento costruttivo* degli insiemi infiniti che emersero delle insanabili antinomie che resero la teoria non-assiomatica degli insiemi di Cantor non applicabile come teoria dei fondamenti della logica e della matematica. Ciò accadde proprio quando Cantor cercò di fondare costruttivamente oggetti «troppo infiniti» (cfr. nota 16), la cui cardinalità, cioè, approssima quella della collezione universale *V*, come quello d'*insieme universale* (nella fondazione di insiemi infiniti, onnicomprensivi, basati sui numeri cardinali) o quella di *insieme massimale* (nella fondazione di insiemi infiniti, onnicomprensivi, basati su numeri ordinali).

Tre generi di infinito;:potenziale, attuale-transfinito e attuale-assoluto

3. *Tre generi di infinito*. A questo punto, si comprende il *terzo caposaldo* della teoria di Cantor: la tripartizione di Cantor in *tre generi di infinito*. Infatti la procedura matriciale di Cantor appena illustrata consente di definire e comparare degli insiemi *attualmente infiniti* mediante una procedura algebrica di determinazione mediante *morfismi* (frecce) che sono *mappe* del dominio infinito di definizione, sebbene essa contenga delle «lacune» (cfr. i tre puntini della procedura rappresentata in Figura 1-7) che possono essere comunque colmate iterando la medesima procedura algebrica di determinazione, «incrementando» così a piacere la determinazione e quindi «l'attualità» della definizione della totalità infinita in questione. Proprio la caratteristica di essere *determinato* e insieme *incrementabile* è ciò che distingue l'infinito *transfinito*. Ma un infinito transfinito è incrementabile anche in un altro senso. Nel senso cioè di un'induzione «transfinita» di *tipi ordinali di transfiniti* che illustreremo fra poco, per la quale a ciascun transfinito di un certo tipo (grado) succederà un altro di tipo più alto fino al limite del *transfinito assoluto massimale* mediante il quale tutto l'«ordinamento assoluto» dei tipi transfiniti può ricevere consistenza logico-matematica. Di qui la tripartizione cantoriana in tre generi di infinito (Cfr. (Basti, 1966, p. 182) che si riferisce al saggio di Cantor sui transfiniti del 1887-88 (Cantor, 1932, p. 450):

a. *Infinito potenziale*: indeterminato e incrementabile.

b. *Infinito attuale transfinito*: determinato e incrementabile.

c. *Infinito attuale assoluto*: determinato e non-incrementabile.

Infinito transfinito assoluto come limite massimo di una successione di tipi ordinali di transfiniti, da non confondersi con l'Infinità Assoluta di Dio

Dove, beninteso, come appena detto, lo «infinito attuale assoluto» *matematico* qui citato non va confuso a detta di Cantor stesso come vedremo, con *l'Infinità Assoluta* di Dio in teologia e in metafisica che è *assolutamente semplice* (non composta di parti: non è un insieme!) e che, come tale, non può essere compresa in *alcuna definizione positiva* – è, cioè, *apofatica* o definibile solo *negativamente* – come la teologia Scolastica sia a Occidente che a Oriente ha sempre affermato. Viceversa, l'infinito attuale assoluto di cui qui Cantor parla dev'essere inteso come il «massimo» di una gerarchia di *tipi ordinali* di insiemi transfiniti che è il cuore, purtroppo inconsistente, della teoria cantoriana del transfinito e della «induzione transfinita», la cui consistenza, come la storia della teoria degli insiemi del '900 dimostra, può essere garantita solo *assiomaticamente*, come illustreremo nel **Capitolo 3**. Ecco come Cantor parla di questo «insieme transfinito assoluto Ω» nel medesimo saggio sui transfiniti appena citato:

> Il transfinito con la sua *pienezza* di formazioni e di forme, necessariamente indica un assoluto, un «vero infinito» la cui dimensione non è capace di incremento o diminuzione e che perciò dev'essere considerato dal punto di vista qualitativo come un *massimo assoluto* (Basti, 1966, p. 185; Cantor, 1932, p. 405).

Il metodo diagonale e la non-numerabilità dei reali

Per comprendere più a fondo la teoria cantoriana dei tipi ordinali di transfinito occorre però ritornare alla dimostrazione cantoriana della *non-numerabilità* dell'insieme infinito dei numeri reali ℝ, usando il medesimo metodo matriciale illustrato in precedenza (cfr. nota 24). Come punto di partenza, ricordiamo che in base al Teorema di Dedekind i reali sono definiti come limiti di successioni infinite di razionali, che stanno, cioè, «fuori» di questa successione. Così se poniamo tutti i razionali ℚ in una matrice del tipo di quella mostrata in Figura 1 per gli interi ℤ le cui righe stavolta corrispondono a tutte le successioni numerabili di razionali,

> in tal caso un reale corrisponderà esattamente alla successione formata da tutti gli elementi posti tracciando una diagonale sulla matrice che selezionerà una cifra di ciascuno dei razionali definiti sulle righe che, per definizione, definirà un numero che non sarà nessuno dei razionali numerabili posti sulle righe (Basti, 1966, p. 190).

Antinomia dell'insieme-potenza e ipotesi del continuo

Sarà, cioè, un irrazionale non-numerabile e quindi un sotto-insieme dei reali. A questo punto si può comprendere meglio anche la cosiddetta *ipotesi del continuo* (*Continuum Hypothesis*, CH) di Cantor visto che i punti del continuo possono essere posti in corrispondenza biunivoca con l'insieme $\mathbb{R}$. Abbiamo già illustrato il Teorema di Cantor secondo il quale ogni insieme A può essere «costruito», cioè, dimostrato non-contraddittoriamente esistente come sottoinsieme del suo insieme-potenza $\mathcal{P}(\mathrm{A})$ con cardinalità (potenza) $2^{\mathrm{card}(A)}$, così che nessun insieme può «contenere» se stesso ma è contenuto in un insieme di cardinalità maggiore, il suo insieme-potenza. Ciò consente di costruire insiemi di cardinalità via via maggiori $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A)), \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))), \ldots$ L'immediata conseguenza è che, se rimaniamo sui numeri cardinali, *non può esistere l'insieme universale* di tutti gli insiemi costruibili, visto che per essere *universale* dovrebbe «contenere se stesso», mentre per essere *insieme*, dovrebbe «non-contenere se stesso»: la cosiddetta «antinomia dell'insieme-potenza».

L'impossibilità di dimostrare potenze intermedie (transfinite) fra il numerabile e il continuo usando i numeri cardinali

Di qui la congettura formulata da Cantor della cosiddetta CH che, data la non-numerabilità dei reali, afferma che la cardinalità del *continuo* costituisce la prima potenza (cardinalità) posta immediatamente al di là di quella del numerabile $\aleph_0$, ovvero $2^{\aleph_0}$. Tale congettura dipende dall'impossibilità dimostrata da Cantor stesso di usare il suo teorema per costruire *cardinali* transfiniti con potenze intermedie $\aleph_1, \aleph_2, \ldots$.

1.6.1.6 La teoria dei tipi ordinali di transfinito

La costruzione dell'induzione transfinita di Cantor usando i numeri ordinali e la sua antinomicità (antinomia di Burali-Forti)

L'intuizione fondamentale di Cantor fu però che ciò che non è possibile fare *direttamente* con transfiniti definiti su numeri *cardinali*, è possibile farlo *indirettamente* mediante transfiniti definiti sui numeri *ordinali* e quindi mediante quella che Cantor definì come una teoria dei *tipi ordinali* di transfiniti, la cui consistenza, ripeto, supponeva l'esistenza di un unico *ordinamento assoluto* e quindi la dimostrazione non-contraddittoria dell'esistenza del *transfinito ordinale massimale* Ω: il transfinito «assoluto» determinato e non-incrementabile che già conosciamo. Spetterà al matematico italiano Cesare Burali-Forti (1861-1931) la dimostrazione pubblicata nel 1897 dell'inconsistenza della nozione di transfinito ordinale massimale e quindi di quel «transfinito assoluto» cercato da Cantor (Burali-Forti, 1897).

La nozione dei tipi ordinali di Cantor e l'antinomicità di tale nozione

In ogni caso, la nozione cantoriana dei «tipi ordinali» di transfinito si basa sulle particolari proprietà degli insiemi infiniti di numeri ordinali rispetto a quelli cardinali: il concetto di *induzione transfinita* che ne deriva è infatti uno dei caposaldi dell'insiemistica moderna, sebbene richieda una fondazione *assiomatica, ipotetico-deduttiva* e non incondizionata o apodittica che illustreremo nelle varie formulazioni *assiomatiche* della TI nel '900 e che vedremo nel **Capitolo 3**.

Numeri naturali cardinali e ordinali

Il ragionamento di Cantor, se opportunamente assiomaticamente fondato, resta comunque valido e indubbiamente brillante. Infatti, se prendiamo un insieme *finito* di numeri ordinali *A,* esso è sempre *bene ordinato* (b.o.), ovvero qualsiasi sottoinsieme indicizzato in *I* di *A* avrà sempre un *primo* elemento minimo *a* dal quale si comincia a ordinare $(\prec)$ l'insieme: $a \prec b \prec c \prec \cdots$. Ciò però non è sempre vero per gli insiemi *infiniti.* Per esempio, se prendiamo l'insieme $\mathbb{Z}$ degli interi (positivi e negativi), non è definibile «il più piccolo numero negativo» dal quale cominciare l'ordinamento di tutti gli interi.

Il buon ordinamento per gli ordinali

Dato questo si possono dimostrare interessanti teoremi come il fatto che l'insieme degli ordinali numerabili $\mathbb{N}(\prec)$ comunque grande si prenda *n* anche infinito, è *bene ordinato* (b.o.), ha sempre un elemento minimo. Indichiamo perciò con ω l'ordinale infinitesimo che compete a $\mathbb{N}(\prec)$ e a tutti gli insiemi b.o. che possono essere posti in una corrispondenza biunivoca con esso e che conservino l'ordine (= insiemi numerabili). Ora, se prendiamo un tratto di $\mathbb{N}(\prec)$ inferiore a un dato *n* che sarà costituito da un insieme finito di ordinali di $\mathbb{N}(\prec)$ (da 0 a *n*-1), esso comunque grande sia *n,* sarà sempre *inferiore* a ω. E questo è chiaramente intuitivo (Cfr. **Figura 1-8**)[25].

b.o. anche per insiemi infiniti di ordinali che non può essere posto in corrispondenza biunivoca con i corrispondenti cardinali: ω elemento-limite di infiniti cardinali b.o. che perciò appartiene alla potenza successiva al numerabile.

Quello che è sconvolgente ma vero è che questo vale anche se prendiamo un insieme *infinito* di ordinali da 0 ad ω. Esso, *non può essere posto in corrispondenza biunivoca* con l'insieme infinito dei cardinali $\mathbb{N}$. Infatti, sebbene sia equipotente a $\mathbb{N}$ (il fatto che si aggiunga un elemento per arrivare ad ω è ininfluente nel caso di insiemi infiniti) e bene ordinato, tuttavia qualsiasi numero cardinale *n* si prenda nella successione di $\mathbb{N}(\prec)$ *esso avrà sempre un predecessore*, mentre l'ordinale ω in questo caso non sarà il successore di alcun numero cardinale perché *non esiste un numero naturale massimo.* Quindi ω *è fuori* della successione ordinata $\mathbb{N}(\prec)$ e conterrà sotto di sé l'intero insieme infinito numerabile di cardinali $\mathbb{N}$. Dunque, ω è il *primo ordinale transfinito*, è l'elemento-limite della successione ordinata $\mathbb{N}(\prec)$ che ha la cardinalità del numerabile $\aleph_0$ ma è posto aldilà di essa e quindi appartenente a un'altra successione infinita e b.o. con potenza (cardinalità) maggiore del numerabile, cioè $\aleph_1$.

[25] Ciò è evidente per ordinali finiti posti in corrispondenza con in cardinali. P.es., il quarto numero (4°) contiene prima di sé i primi tre (1,2,3), il quinto i primi quattro e così via. Si può dunque ipotizzare che l'ordinale infinito ω contenga sotto di sé l'infinità *numerabile* di tutti i numeri cardinali, cosa che è impossibile per i numeri cardinali poiché non esiste il numero cardinale *massimo.*

Possibilità di definire ricorsivamente nuove successioni transfinite di naturali per induzione transfinita

Quindi, i numeri ordinali relativi alla cardinalità del numerabile costituiscono un insieme b.o. $\aleph_1(\prec)$. Con lo stesso ragionamento possiamo costruire allora un nuovo ordinale-limite, ovvero un *tipo ordinale successivo* a ω, cioè ω^2 più grande di tutti gli ordinali che costituiscono l'insieme b.o. $\aleph_1(\prec)$. Ciò significa che la potenza di $\aleph_1(\prec)$ dovrà essere necessariamente superiore a quella del numerabile $\aleph_0$ che è la cardinalità di $\mathbb{N}(\prec)$, altrimenti anche ω^2 apparterrebbe ad $\aleph_1(\prec)$ e questo è contraddittorio. Così Cantor, usando i transfiniti ordinali ha costruito una potenza (cardinalità) superiore al numerabile cioè $\aleph_1$, il cui ordinale-limite posto al di là di questa nuova successione transfinita cioè ω^2 costituisce a sua volta un tipo ordinale transfinito successivo a ω e appartenente all'insieme infinito b.o. $\aleph_2(\prec)$. Insomma, arrivati a $\aleph_1$ con la stessa procedura di *induzione transfinita* possiamo costruire una nuova cardinalità transfinita superiore cioè $\aleph_2$ con limite posto al di là di essa cioè ω^3. Esso sarà il tipo ordinale successivo a ω^2 e apparterrà all'insieme b.o.: $\aleph_3(\prec)$, e così via indefinitamente.

Teoria cantoriana dei tipi ordinali transfiniti

In sintesi, la successione infinita b.o. di ordinali $\mathbb{N}(\prec)$ e che ha la potenza del numerabile $\aleph_0$ ha come limite transfinito posto al di là di essa il transfinito ordinale ω, ovvero: $\lim_{n\to\infty}\{0,1,2,\dots,n,\dots\} = \omega$. Esso a sua volta apparterrà a una nuova successione infinita b.o. di ordinali e cardinali transfiniti *di tipo ordinale* ω, $0, 1_\omega, 2_\omega, 3_\omega$, ..., dove ciascuna unità transfinita della successione infinita «contiene sotto di sé» *infiniti naturali* della sequenza $\mathbb{N}$ del numerabile $\aleph_0$. Questa nuova successione naturali transfiniti *di ordine superiore a quella del numerabile* sarà a sua volta equipotente con un nuovo insieme infinito di *cardinali transfiniti* b.o. con potenza superiore al numerabile, cioè $\aleph_1(\prec)$. Essa avrà come limite transfinito posto al di là di essa il transfinito di *tipo ordinale superiore a* ω, cioè ω^2, ovvero: $\lim_{n\to\infty}\{0', 1_\omega, 2_\omega, \dots, n_\omega, \dots\} = \omega^2$. ω^2 apparterrà a sua volta a una ulteriore successione transfinita b.o. di cardinali $\aleph_2(\prec)$ che avrà come limite il transfinito di tipo ordinale superiore ω_2 appartenente a $\aleph_3(\prec)$ e così via indefinitamente (cfr. Figura 1-8 per una rappresentazione in geometria proiettiva del procedimento).

Consistenza della teoria dei tipi ordinali solo supponendo l'esistenza del transfinito ordinale massimale Ω che è contraddittoria (Burali-Forti)

Come si intuisce, quello che a Cantor non era riuscito di fare con i numeri cardinali, ovvero costruire potenze (cardinalità) di insiemi infiniti superiori al numerabile, ma inferiori alla cardinalità del continuo e quindi confutando CH sembrava essergli riuscito con gli ordinali transfiniti. Sappiamo però come la speranza di Cantor di rendere consistente questa procedura di induzione transfinita di tipi ordinali – ciascuno che costituisce il limite di una nuova successione bene ordinata di cardinali transfiniti, ognuna con una potenza infinita maggiore del numerabile via via crescente – svanì miseramente con la dimostrazione di inconsistenza data da Burali-Forti della nozione cantoriana di *transfinito assoluto* come «transfinito ordinale massimo e non incrementabile». Se così non fosse stato, Cantor avrebbe dimostrato la falsità di CH e *avremmo avuto una dimostrazione costruttiva* che la potenza (cardinalità) non-numerabile del continuo coincide con quella dell'insieme transfinito assoluto Ω. Vista l'enormità della questione per i Fondamenti della Matematica cerchiamo di capire bene la nozione di *induzione transfinita* così da comprendere perché alcune delle più geniali menti matematiche del '900 si siano sforzate – riuscendoci! – di rendere consistente *assiomaticamente* l'intuizione cantoriana dell'*induzione transfinita*, superando la sua antinomicità, anche se a patto di perderne il carattere *incondizionato*.

Rappresentazione in geometria proiettiva del principio di induzione transfinita (Enriques)

Per capire almeno intuitivamente il cuore della costruzione cantoriana dell'*induzione transfinita* ci serviremo di una *rappresentazione geometrica di tipo proiettivo* dei primi due ordini (tipi ordinali) di transfinito fornita dal matematico italiano Federigo Enriques (1871-1946) nelle sue famose *Lezioni di geometria proiettiva* (1898) (Enriques, 1898), anche per le implicazioni metafisiche e teologiche che questa «simbolica dell'infinito» a *prospettive rovesciate* dove il «finito si apre all'infinito» reca con sé, come Cantor stesso voleva e che sono state per la prima volta esplicitate e divulgate dal grande matematico e teologo ortodosso russo Pavel Alexsandrovic Florenskij (1882-1937) (Florenskij, 2012; 2020), vittima della persecuzione di Stalin, come vedremo nei **Capitoli 5 e 6**[26]**.**

[26] È ben noto fin dall'antichità lo stretto rapporto fra la nozione platonica di «partecipazione» del finito all'infinito e il formalismo geometrico della proiezione per cui, p. es., due proiezioni bidimensionali sono «partecipazioni» dell'oggetto tridimensionale, condividendo una dimensione e includendo alternativamente una delle altre due.

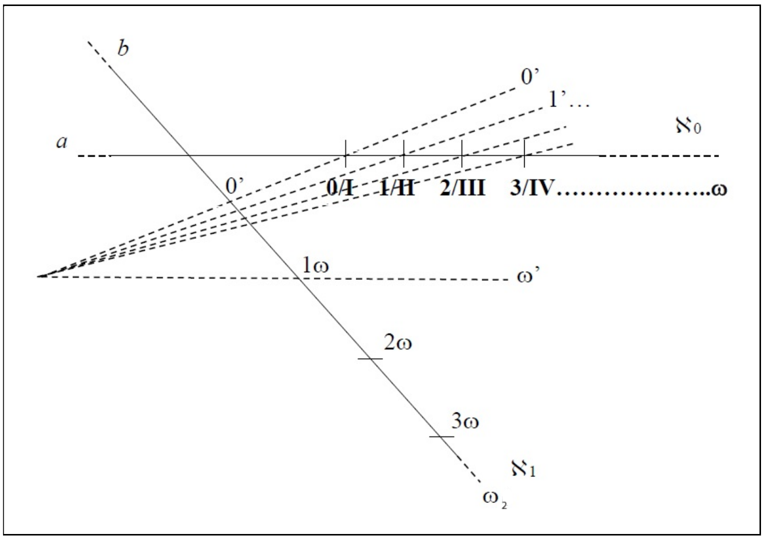

Figura 1-8. Rappresentazione proiettiva dei primi due tipi ordinali transfiniti, ω e ω^2 che delimitano, rispettivamente, la potenza del numerabile $\aleph_0$ e la potenza immediatamente successiva $\aleph_1$ relativa al primo ordine di cardinali transfiniti 1ω, 2ω, 3ω, …

Simbolismo «aperto all'infinito» del transfinito e dell'icona ortodossa «a prospettive rovesciate»

Questa rappresentazione dei primi due tipi ordinali di transfinito evidenzia molto bene il rapporto fra il simbolismo numerico transfinito e il simbolismo «aperto all'infinito» dell'icona ortodossa, dove «il finito è *partecipazione* dell'infinito» (cfr. Figura 1-9). La costruzione proiettiva è quanto mai semplice ed intuitiva. Fissiamo sulla retta *a* l'insieme infinito $\mathbb{N}$ dei naturali $\{0,1,2,3,\ldots\}$ che causa il loro b.o. potrà essere messo in corrispondenza biunivoca con l'insieme degli ordinali $\{\mathrm{I},\mathrm{II},\mathrm{III},\mathrm{IV},\ldots\}$, dal che si evince immediatamente che ogni ordinale *n* include tutti i cardinali fino a *n*-1. Il limite posto al di là della successione dei naturali, sarà l'ordinale infinito ω che così conterrà sotto di sé l'intero insieme infinito dei naturali con la potenza del numerabile $\aleph_0$, che quindi *non apparterrà a* $\aleph_0$ e dunque costituirà *il tipo ordinale transfinito minimale* ω. Ora, se tracciamo un'altra retta *b* obliqua ad *a* è possibile proiettare su di essa una nuova successione numerabile infinita di cardinali $\{0',1',2',3',\ldots\}$ perché posta in corrispondenza biunivoca con l'insieme $\{0,1,2,3,\ldots\}$. Tracciando una parallela ad *a* è possibile però proiettare su *b anche il punto all'infinito* ω'. In tal modo si delimiterà su *b un nuovo intervallo unitario* $[0,1_\omega]$ che da solo avrà la potenza del numerabile $\aleph_0$ perché conterrà l'intero insieme infinito $\mathbb{N}$. Iterando questo intervallo unitario si determinerà su *b* un nuovo insieme infinito di cardinali transfiniti $\{0', 1_\omega, 2_\omega, 3_\omega \dots\}$ di tipo ordinale ω, e quindi con potenza (cardinalità infinita) $\aleph_1$ superiore al numerabile $\aleph_0$. Questa nuova successione infinita avrà come limite posto fuori della successione il tipo ordinale transfinito immediatamente superiore a ω, e cioè ω^2 che apparterrà ad $\aleph_2$. Infatti, usando la medesima procedura, non rappresentata nella figura ma facilmente intuibile, si potrà determinare un nuovo insieme infinito di cardinali transfiniti $\{0', 1_{\omega^2}, 2_{\omega^2}, 3_{\omega^2} \dots\}$ di tipo ordinale ω^2 con potenza $\aleph_2$ e che avrà come limite il tipo ordinale transfinito ω^3 che apparterrà ad $\aleph_3$, e così via indefinitamente. Vedremo nel **Capitolo 3** che questa costruzione può essere resa assiomaticamente rigorosa usando la teoria degli insiemi generici di Cohen (Cohen, 1966), visto il carattere antinomico della costruzione dei tipi ordinali di Cantor, che esamineremo nella sottosezione seguente.

Simbolismo transfinito e iconico in Florenskij: finito come partecipazione dell'infinito a diversi gradi

Da questa costruzione «proiettiva» di numeri cardinali transfiniti di diversi tipi ordinali si intuisce immediatamente, visivamente, *l'apertura verso l'infinito* che caratterizza tanto il simbolo numerico transfinito, quanto quello dell'icona ortodossa che tanto affascinò Florenskij (Florenskij, 2020) (Cfr. Figura 1-9). Simboli che soddisfano ambedue la teoria della *partecipazione* platonica essendo ambedue una sorta di «finitizzazione» dell'infinito.

Figura 1-9. L'icona della SS.ma Trinità di Andrej Rublëv con le sue caratteristiche prospettive inverse che «aprono» verso l'infinito e «chiudono» verso colui che osserva l'icona[27].

[27] In questa ricostruzione del pensiero di Florenskij in relazione a Cantor mi sono ampiamente avvalso della recente tesi dottorale di Giacomo Chiavarini (Chiavarini, 2021).

1.6.1.7 L'antinomia di Burali-Forti

Costruzione proiettiva ci fa comprendere anche antinomia di Burali-Forti ogni ordinale transfinito appartiene alla potenza successiva dei numerabili e quindi non può esistere un ordinale transfinito massimale Ω che si auto-contenga

Allo stesso tempo, questa ricostruzione della procedura costruttiva di induzione transfinita di Cantor ci fa chiaramente intuire anche il cuore della dimostrazione di Burali-Forti del carattere antinomico della procedura (Burali-Forti, 1897), se non assiomaticamente e dunque *ipoteticamente* fondata. Infatti, la fondatezza della procedura richiederebbe la dimostrabilità del *transfinito ordinale assoluto* Ω, determinato e non ulteriormente incrementabile, capace non solo di contenere sotto di sé e quindi *ordinare* la successione transfinita dei tipi ordinali $\omega, \dots, \omega^n, \dots, \omega^{n^{n^{\cdots}}}, \dots, \omega^\omega, \dots$, *ma anche se stesso,* il che è chiaramente assurdo, visto che ogni tipo ordinale appartiene necessariamente al successivo. Il che ci riporta al concetto fondamentale evidenziato per primo da Russell nei *Principia* come soluzione all'antinomia di Cantor, ma anche di quella di Frege, come vedremo subito, che nessun insieme *ben fondato* può *appartenere a se stesso,* o *auto-contenersi.*

1.6.2 La teoria logicista di Frege sui fondamenti e l'antinomia di Russell

La scoperta dell'antinomia di Russell come antinomia logica

Di ben maggiore risonanza culturale dell'antinomia di Burali-Forti riguardo la TI di Cantor fu la scoperta ad opera di Bertrand Russell (1872-1970) nel 1902 dell'antinomia che porta il suo nome riguardo la teoria di Frege. La maggior risonanza è legata al fatto che tale antinomia — sebbene sostanzialmente equivalente a quella di Cantor — fu scoperta nell'ambito del tentativo di G. Frege di una fondazione *logicista* della matematica.

Risonanza della scoperta:

La risonanza culturale che l'antinomia di Russell ebbe ha due motivazioni, l'una contingente, l'altra sostanziale:

1. Per la rilevanza dei personaggi coinvolti.

1. La prima, contingente, è legata alla fama dei personaggi coinvolti. Frege, perché era il matematico e il filosofo della matematica più famoso del suo tempo, la fine del XIX secolo, e Russell perché lo sarebbe diventato di lì a poco, all'inizio del XX secolo, dopo la pubblicazione, fra il 1900 e il 1910, della monumentale opera, i *Principia Mathematica,* scritta in collaborazione con Alfred North Whitehead (1861-1947). In tale opera, Russell non solo presenterà al grande pubblico dei matematici la sua antinomia, ma anche la soluzione da lui proposta, ovvero *la teoria dei tipi logici ramificata* che, a sua volta, non è esente da problemi formali molto pesanti[28].

[28] Data l'impraticabilità della soluzione russelliana, molto più praticabile è risultata essere la *teoria dei tipi logici semplice* proposta da Frank Plumpton Ramsey (1903-1930) nel 1926.

2. Per la dimostrazione che il problema delle antinomie era logico-sintattico e non solo logico-semantico come si era creduto per millenni

2. Perché l'antinomia scoperta era di tipo *logico-sintattico.* Innanzitutto, non era di tipo di tipo esclusivamente *matematico,* come sembravano essere le antinomie della teoria degli insiemi di Cantor. Invece, riguardando classi e predicati, era antinomia di tipo *logico*, includendo quindi predicati e classi di oggetti *matematici* come caso particolare. Poi, tale antinomia seppur logica, era di tipo *logico-sintattico* e non *logico-semantico,* come lo erano invece le varie antinomie logiche già conosciute da millenni nella storia della logica, a cominciare dalla famosa «antinomia del mentitore». L'approccio *formalista* appena nato alla logica e alla matematica non è esente insomma da limitazioni intrinseche[29].

Sarcasticamente, il grande matematico francese Henri Poincaré, fiero oppositore del formalismo e sostenitore del ruolo dell'intuizione nei fondamenti della matematica, commenterà così l'annuncio della scoperta dell'antinomia di Russell: «il formalismo finalmente si è dimostrato fecondo: ha generato le antinomie».

Il carattere logico–sintattico dell'antinomia

Ma in cosa consiste l'antinomia di Russell e il suo carattere logico-sintattico che la rende così temibile? Il problema che essa ha svelato — mostrando, ripeto, l'estrema utilità del metodo formale come metodo per favorire rigore e trasparenza alle dimostrazioni contro i tranelli dell'evidenza — si può sintetizzare come segue. Esamineremo prima il *carattere logico* e non solo matematico dell'antinomia, poi, all'interno di questo, il suo carattere *sintattico* e non solo semantico.

Tale teoria distingue i vari tipi logici mediante opportuni *termini primitivi.* In tal modo può evitare di far riferimento a logiche di ordine superiore con predicati che hanno per argomento una totalità infinita di predicati di ordine logico inferiore, la cui esistenza è giustificata mediante l'assai discutibile «assioma di riducibilità» nella teoria di Russell. La soluzione di Ramsey, tuttavia, non è senza problemi perché, «moltiplicando entità», costringe poi a delle analisi molto pesanti di consistenza del sistema formale risultante. In ogni caso, resta assodato il principio della *teoria generale dei tipi* e cioè: per evitare antinomie, occorre che le proposizioni di un certo linguaggio formale siano costruite con predicati che, quando hanno per argomento delle totalità infinite di elementi (p.es., predicati con variabili legate da un quantificatore universale: «per tutti»), questi elementi appartengano a un tipo logico inferiore. Ovvero, non sono ammissibili collezioni che contengono elementi che possono essere definiti come esistenti solo supponendo la totalità della collezione stessa (principio del circolo vizioso in definizioni *impredicative*). In termini ultra-semplificati, una totalità infinita di elementi può essere giustificata/definita in modo consistente come tale solo «dal di fuori» della totalità stessa.

[29] Ciò non vuol dire che si nega il progresso che la formalizzazione moderna della scienza matematica implica. L'importante però è non credere che questo progresso consista nella definizione di un metodo per proporre teorie infallibili, come avrebbe voluto l'ideologia scientista. Va invece nella direzione di proporre una metodologia che non «nasconde i propri errori» sotto un cumulo di parole, ma li rende palesi. Il formalismo aiuta la trasparenza e l'onestà intellettuale, non garantisce l'infallibilità.

Il carattere logico dell'antinomia e la sua confutazione del tentativo *logicista* di Frege di fondazione dell'aritmetica

Come ricordato, l'antinomia di Russell bloccò il tentativo *logicista* di fondazione della matematica da parte di Frege, ovvero, la sua idea di dimostrare la sostanziale *equivalenza* fra la logica e la matematica, fondando questa su quella[30]. A tale scopo, fra l'altro, Frege si dedicò alla costruzione rigorosa di una *logica matematica,* tentativo portato avanti con successo, sebbene il simbolismo che egli usò era troppo astruso e, nell'uso dei matematici del XX secolo, prevalse il simbolismo molto più intuitivo di Peano e di Russell, reso famoso dai *Principia.* In ogni caso, la completa simbolizzazione della logica formale classica fu la realizzazione per la quale Frege si è conquistato un posto imperituro nella storia della logica, della matematica e della filosofia.

Carattere *costruttivo* della teoria degli insiemi di Cantor

Ora Russell, con la sua scoperta dell'antinomia nella teoria delle classi di Frege, inferse un colpo mortale, non solo alla teoria logicista dei fondamenti, ma anche alla psicologia del grande matematico tedesco[31].

Illusione di Frege di superare antinomie con la nozione non-costruttiva di classi che possono auto-contenersi

In sintesi, Frege era convinto che le antinomie scoperte da Cantor fossero legate alla particolare nozione di «insieme» ed alla sua caratteristica costruttività che lo rendeva nozione di applicabilità strettamente matematica. Infatti gli insiemi sono costituiti in esistenza nella teoria cantoriana — e qui è tutta la sua bellezza formale! — non mediante assiomi ipotetici di esistenza, come sarà nelle future teorie «assiomatiche» degli insiemi, ma esclusivamente con una procedura dimostrativa, del tutto costruttiva, addirittura algoritmica, basata esclusivamente sul p.n.c.. Ogni insieme, infatti, è costituito come sottoinsieme del suo insieme–potenza, ovvero dell'insieme di tutte le possibili combinazioni dei sottoinsiemi dell'insieme di partenza, e così all'infinito, sia verso l'alto che verso il basso, senza supporre come assiomaticamente dati classi/insiemi «primi» non-costruibili ma assiomaticamente dati su cui basare il resto della costruzione. Viene

---

[30] Per questa sua idea, Frege viene talvolta definito come l'ultimo grande logico «aristotelico». Affermando infatti la preminenza della logica formale sulla matematica, si muoveva nella stessa direzione teoretica dello Stagirita.

[31] Ciò si spiega anche per le circostanze in cui Russell comunicò al collega tedesco la sua scoperta. Essa fu comunicata mentre erano in corso le stampe delle bozze del libro sui fondamenti che Frege stava pubblicando e sul quale aveva chiesto il parere di Russell. Dopo una simile scoperta, tutto il libro, che costituiva per Frege il coronamento di una carriera brillantissima e anche lo scopo ultimo per cui aveva lavorato tutta la vita e creato la logica simbolica — l'unificazione della logica e della matematica —, dovette essere abbandonato. Non certo però le grandi scoperte di Frege e soprattutto la sua invenzione della nozione di *funzione proposizionale*,* cuore di tutta la logica simbolica moderna. Tale nozione è sicuramente una delle più grandi conquiste intellettuali dell'occidente in campo logico, dopo l'invenzione della logica formale da parte di Aristotele. Solo che quest'invenzione non servì per gli scopi che il suo autore si prefiggeva. L'umiltà intellettuale ed il distacco morale dalle proprie scoperte sono fondamentali anche nella scienza. Siamo servitori della verità e della scienza, mai padroni!

naturale pensare, allora, che sostituendo la proprietà di costruttività ricorsiva che rende ogni insieme sempre sottoinsieme di qualche altro insieme, si elimini anche la possibilità di cadere in antinomia. Le *classi* infatti possono in linea di principio *auto-contenersi.*

Carattere *ingenuo* della teoria delle classi di Frege perché loro esistenza legata all'assioma incondizionato di astrazione

Di qui l'idea di Frege di fondare gli insiemi matematici mediante la nozione logica di *classe*, definendo una *proprietà universale* che caratterizzi tutte le classi, il cosiddetto *assioma incondizionato di astrazione*. Tale assioma in sostanza afferma che, data una *proprietà* e il *predicato* che la esprime linguisticamente, è costituita *ipso facto* in esistenza anche la classe di tutti gli elementi che hanno quella proprietà e quindi *soddisfano* quel predicato che, cioè, lo rendono «vero», costituendo il *dominio* di quel predicato[32]. P.es., definire il predicato «essere rosso» significa costituire la «classe di tutti gli oggetti rossi» e con essa il *dominio* di applicazione o *estensione* di quel predicato che lo rende vero definendolo univocamente all'interno del linguaggio. Proprio per questa sua caratteristica di fondare la coerenza della nozione di «classe», ovvero la consistenza del dominio di un predicato in un dato linguaggio, sulla supposta «verità» (soddisfacibilità) del predicato ad essa associato, la teoria di Frege è definita come *teoria ingenua delle classi.*

Distinzione fra *classi normali* e *classi non-normali*

L'antinomia celata in tale costruzione si evince immediatamente non appena con Russell distinguiamo fra due tipi di classi logiche:

- *Le classi normali,* le classi che non sono membri di se stesse, ovvero che non contengono se stesse come *elemento* come sono la grande maggioranza delle classi logiche in qualsiasi genere di linguaggio (p.es., la classe degli uomini non è un uomo a sua volta, perché è costituita su un predicato, essere-uomo, che non si applica a se stesso). In particolare, sono classi normali, la stragrande maggioranza di classi che costituiscono gli oggetti matematici, i numeri innanzitutto[33].

---

[32] Una definizione equivalente e più stringata di questo principio può trovarsi in (Lombardo–Radice 1981, 87) ed è riportata nella nota 34).

[33] Ciascun numero naturale, 0,1,2,3… è definito nell'approccio fregano come la classe di tutte le classi che contengono, rispettivamente, nessun, uno, due tre, …, elementi. E' chiaro, dunque, che i numeri sono tutte classi che *non* si auto–appartengono: p.es., la classe di *tutte* le classi di cardinalità 3 non ha cardinalità 3, evidentemente. Proprio come per usare il linguaggio di Russell intriso di *humor* inglese, «la classe di tutte le teiere non è una teiera», o il famoso argomento del «terzo uomo» con cui Aristotele criticava l'essenzialismo platonico: «l'umanità (come essenza comune a tutti gli uomini) non è un uomo». Pensiamo ora alla classe di tutti i numeri, oggetto dell'aritmetica fregeana. Essa sarà la classe di tutte classi che non si auto-appartengono. Essa conterrà o no se stessa? Se sì, l'aritmetica (e più in generale la matematica) risulterà essere una scienza del tutto autonoma, auto–fondantesi in maniera non-contraddittoria mediante la teoria di Frege. Se no, come Russell ha dimostrato, i fondamenti dell'aritmetica (e della matematica) andrebbero cercati altrove…

- *Le classi non-normali,* ovvero le classi che contengono se stesse come elemento, perché sono costituite su predicati che si applicano a se stessi (p.es., la classe dei polisillabi appartiene a se stessa, perché «polisillabo» è polisillabo, a differenza, per esempio, di «monosillabo»).

L'antinomicità della nozione di «classe totale» applicata alle classi normali

E' evidente che finché rimaniamo alle classi non-normali non c'è alcun problema a pensare a «classi totali», ovvero pensare a «classi di tutte le classi che contengono se stesse». Una classe di questo genere conterrà anche se stessa e sarà dunque totale. Ma quando ci avventuriamo nella definizione di «classe totale di classi normali» — quelle di cui, fra l'altro, sono fatti gli oggetti matematici ed innanzitutto i numeri, nell'approccio fregeano — ci scontriamo con un'antinomia insuperabile proprio come nella teoria di Cantor, basata sui numeri come insiemi e non come classi. Per rendercene conto, basta domandarsi se la classe di tutte le classi che *non* contengono se stesse come elementi, cioè che *non si auto-appartengono* – dove vale cioè la "clausola di Russell": $\neg(x \in x)$ –, conterrà o no se stessa. Se *contiene* se stessa, allora *non contiene* se stessa — perché per definizione può contenere tutte e sole classi che *non* si auto–appartengono. Se *non contiene* se stessa, allora *contiene* se stessa — perché, sempre per definizione, deve contenere *tutte* le classi che non si auto–appartengono. Dunque: se è *sì* allora è *no*, se è *no* allora è *sì*: antinomia. Come si vede, la nozione che si usa normalmente nella matematica come «classe di tutti i numeri» è tutt'altro che evidente e scontata: nasconde invece parecchie insidie!

Il carattere logico dell'antinomia e la disperazione di Frege

È significativa la lettera accorata con cui Frege rispose a Russell. Frege era infatti ben cosciente che con la scoperta del carattere logico e non matematico dell'antinomicità di oggetti-collezione onnicomprensivi, siano essi insiemi o classi, ci si trovava di fronte alla morte di un sogno, non solo il suo, ma di un'intera epoca culturale, quello dello *scientismo* moderno.

> La vostra scoperta della contraddizione mi ha causato la più grande sorpresa, starei per dire, costernazione, poiché ha scosso la base sulla quale intendevo costruire l'aritmetica[34]. (...) E ancora adesso non comprendo come l'aritmetica possa venire fondata scientificamente (...) se non è permesso (...) passare da un concetto alla sua estensione. Posso parlare in ogni caso di estensione di un concetto, ossia posso parlare in ogni caso di una «classe»?
>
> *Solatium miseris, socios habuisse malorum*. Questo conforto, se conforto è, soccorre anche me. Infatti, tutti coloro che nelle dimostrazioni

[34] Tale base, come già visto e come espliciteremo adesso in maniera più formale, si definisce generalmente come *principio incondizionato di astrazione* (cfr. formula (1)): «ogni proprietà determina l'insieme degli elementi che la verificano (determina, cioè, l'*estensione* del predicato φ corripondente)»

hanno fatto uso delle estensioni concettuali, classi, insiemi, sono nella mia stessa situazione. Qui non è in causa il mio metodo di fondazione particolare, ma la possibilità di una fondazione logica dell'aritmetica in generale (testo citato in (Lombardo - Radice 1981, 87)).

1.6.3 Il carattere sintattico delle antinomie e la natura necessariamente ipotetica della matematica

Il carattere sintattico non semantico dell'antinomia e il suo superamento assiomatico ipotetico-deduttivo

Il carattere *sintattico* dell'antinomia scoperta da Russell accomuna tanto l'antinomia della teoria degli insiemi di Cantor quanto quella della teoria delle classi di Frege, in quanto ambedue sottendono in maniera *incondizionata* il primitivo dell'appartenenza $\in$. Senza, cioè, garantire in maniera *ipotetica*, mediante cioè opportuni assiomi, l'esistenza della collezione (classe/insieme) cui una *totalità di elementi* appartengono in maniera non-contraddittoria come dominio di un predicato φ e, ultimamente, garantire l'esistenza della *collezione universale V* alla quale tutti gli oggetti – siano essi insiemi o classi – delle rispettive teorie appartengono, costituendo così il dominio del predicato *essere vero* in quella teoria.

Dimostrazione formale dell'antinomia di Russell

Ciò si vede bene quando consideriamo la dimostrazione data da Russell dell'antinomia di Frege se usiamo il suo schema assiomatico di «astrazione» – effettivamente la «Legge fondamentale V» dei *Grundgesetze der Arithmetik* – mediante cui egli voleva garantire *incondizionatamente* la capacità concettualizzante dell'uomo. Ovvero, la capacità *astrattiva dell'universale logico* (*unum versus alia*) dell'intelletto umano, quella che, come vedremo nel **Capitolo Quinto,** è la scoperta fondamentale di Platone alla base del pensiero occidentale e più in generale del *pensiero logico*. Ovvero, la distinzione fra *l'unicità formale* del concetto o universale logico, rispetto all'*unità quantitativa* di una *molteplicità* enumerabile di oggetti di cui per primo Democrito aveva fornito una definizione consistente, contro l'obiezione di Parmenide riguardo la non contraddittorietà della nozione di *molteplicità numerabile*. Nella teoria delle classi di Frege, questo doveva essere garantito dal cosiddetto *assioma incondizionato di astrazione*. Quello per cui, una volta definito – coerentemente al resto di un linguaggio formale – un dato predicato φx, *ipso facto* abbiamo definito in maniera consistente anche la sua *estensione,* ovvero *la classe y di elementi x* che condividono la proprietà espressa dal predicato, e quindi lo soddisfano (rendendolo *vero*). Cioè,

$$\exists y \forall x (x \in y) \leftrightarrow \varphi x \tag{1}$$

La clausola di non-auto-appartenenza per le classi normali

Nei termini della teoria di Frege dei numeri come "classi di classi", secondo l'acuta critica di Russell, tutti i numeri sono delle classi *normali.* Sono, cioè, classi in cui la proprietà condivisa dagli elementi del dominio ed espressa dal predicato φx è ultimamente quella «di non essere membri di se stessi», cioè $\neg(x \in x)$ (cfr. nota 33). Ora, se consideriamo la *classe di tutte le classi che non si auto-appartengono* (ad esempio, la classe di tutti i numeri in aritmetica), stiamo di fatto prendendo come esempio di (1) la seguente formula:

$$\exists y \forall x \big(x \in y \leftrightarrow \neg(x \in x)\big) \tag{2}$$

Rende antinomica la clausola di Russell applicata alla totalità delle classi normali

con la clausola aggiuntiva di Russell che $x = y$, visto che la totalità di tutti gli elementi x che non si auto-appartengono costituirebbero a loro volta una classe y, così che da (2) deriva immediatamente la contraddizione:

$$(y \in y) \leftrightarrow \neg(y \in y) \tag{3}$$

Superamento dell'antinomia negando il carattere incondizionato dell'assioma di astrazione

Pertanto, se vogliamo evitare questa antinomia «che mostra chiaramente che ammettendo (1) come assioma abbiamo concesso troppo» (Suppes, 1972), p.16ss.), dobbiamo ridurre il carattere *incondizionato* di (1) nei termini della forma *condizionale* dello schema assiomatico di *separazione* di Ernst Zermelo (il famoso *Aussonderung Axiom*) (Zermelo, 1908) che illustreremo nel **Capitolo 3**. In effetti, è *sempre* possibile separare gli elementi di un dato insieme y che soddisfano una certa proprietà e formano l'insieme costituito proprio da questi elementi, se supponiamo un ulteriore insieme z che include y come sotto-insieme *disgiunto* dagli altri sottoinsiemi di z e che può costituire così in maniera non-contraddittoria il dominio di un dato predicato φ come desiderava Frege (Suppes, 1972, pp. 17-18). In questo caso, infatti, invece di (2), avremmo:

$$\exists y \forall x ((x \in y) \leftrightarrow (x \in z \wedge \varphi x)) \tag{4}$$

Così, se aggiungiamo la clausola di non-appartenenza per le classi normali $\neg(x \in x)$, come esempio di (4) avremmo:

$$\exists y \forall x ((x \in y) \leftrightarrow (x \in z \wedge \neg(x \in x)) \tag{5}$$

Pertanto, se poniamo la clausola di Russell che $x = y$, significa che abbiamo:

$$(y \in y) \leftrightarrow (y \in z \wedge \neg(y \in y)) \tag{6}$$

che non è contraddittoria perché è *falsa* su entrambi i lati dell'equivalenza[35].

[35] Che il lato sinistro dell'equivalenza sia falso è evidente visto che per ipotesi abbiamo posto che $y \in z$ e quindi $\neg(y \in y)$. Che il lato destro dell'equivalenza sia altrettanto falso diventa evidente non appena riflettiamo sul fatto che non è affatto vero che $y \in z$ a condizione che y non si auto-appartenga, visto che è vero esattamente il contrario!

Superamento dell'antinomia, principio di elementarità insiemistica e nascita delle teorie assiomatiche ipotetico-deduttive degli insiemi

Lascio al lettore la dimostrazione che questa soluzione di Russell all'antinomia di Frege (e di Cantor) non è altro che la riproposizione del *principio di elementarità insiemistica* formulato da Russell medesimo nei *Principia* per cui *la reductio ad unum* dell'universale logico si può giustificare a patto di considerare una classe/insieme come *elemento* (sottoclasse/sottoinsieme) di una ulteriore classe/insieme cui appartiene di *tipo logico* superiore (cfr. **Capitolo 3**). In ogni caso, proprio perché nella teoria di Russell tale principio è legato all'assai discutibile «assioma di riduzione» della *teoria dei tipi ramificata* (Cfr. nota 28), la soluzione di Russell dell'antinomia ha portato a formulare diverse altre consistenti teorie *assiomatiche* degli insiemi quali **Z, ZF(C), NBG** che illustreeremo nel **Capitolo 3.** Per il momento, ciò che mi preme sottolineare è che ciò che le accomuna è il fatto che esse sono in grado di evitare le antinomie non permettendo costruzioni *incondizionate* senza, cioè supporre ulteriori assiomi, di insiemi/classi usando termini come «tutti gli insiemi/classi con la proprietà *P*» come è possibile teoria degli insiemi di Cantor o nella teoria delle classi di Frege.

L'antinomia di Russell non è semantica perché legata alla sola nozione di appartenenza e dunque suppone l'abbandono del legame apodittico verità-coerenza in matematica: la cui consistenza può essere garantita mediante assiomi puramente ipotetici.

D'altra parte, l'ultima sottolineatura nella sconsolata citazione di Frege che concludeva la precedente sottosezione esprime bene come la scoperta di Russell va ben oltre i limiti dello stesso tentativo fregeano, di una fondazione logicista della matematica mediante la teoria delle classi. Infatti, la teoria di Frege si muoveva ancora nell'ambito dell'approccio classico alla logica e alla matematica che faceva dipendere la coerenza dalla verità. Quello stesso per cui, prima di Lobacevskji e Riemann si dava per scontata la verità «auto-evidente» della geometria euclidea. Per Frege, sia la logica che la matematica hanno a che fare con enunciati veri e non solo coerenti. Lo stesso assioma di astrazione prima ricordato rende palese che la struttura sintattica di classe si fonda per Frege sul carattere veritativo dell'enunciazione: la classe è costituita dalla relazione fra predicato e il domino che soddisfa il predicato, che cioè lo rende *incondizionatamente vero*. L'antinomia scoperta da Russell invece si muove esclusivamente sul piano sintattico della relazione di *appartenenza* di classe, non tocca minimamente il problema della verità o meno del predicato. Se vogliamo l'antinomia e la sua soluzione viene «prima» di questo problema della verità: è questione *sintattica,* riguarda la formalizzazione logica degli enunciati predicativi, non *semantica*, non riguarda cioè il *contenuto* degli stessi.

Si rimuove così un pregiudizio millenario, che le antinomie fossero essenzialmente di origine semantica

Questa caratteristica della scoperta di Russell è importante perché rimuove un altro pregiudizio che nei secoli si era sedimentato. E cioè che le antinomie logiche nascessero esclusivamente al di fuori della *sintassi* e della forma dell'argomentazione, che fossero legate, cioè, esclusivamente al contenuto dell'argomentazione medesima, che avessero insomma un esclusivo carattere *semantico* e non *sintattico.*

Il caso tipico dell'antinomia del mentitore di origine sofistica

Paradigmatica a questo riguardo era la famosa «antinomia del mentitore», conosciuta fin dall'antichità, ai tempi dei megarici, e di cui si interessò Aristotele nei *Topici* e nelle *Confutazioni sofistiche* (25, 180b2-7) e, prima di lui, forse Platone nell'*Eutidemo* (283a-286a)[36]. Nella sua forma più semplice consiste nel partire dall'enunciato «I cretesi affermano: "tutti i cretesi sono bugiardi"» e domandarsi se ciò che i cretesi affermano di se stessi è vero o falso. È chiaro che quest'antinomia è di tipo semantico: ha a che fare con la verità o la falsità di enunciati su altri enunciati, come la necessità dell'uso di due livelli di virgolette evidenzia grammaticalmente. Per questa falsa convinzione del carattere esclusivamente semantico di ogni antinomia logica, sul modello di quella del mentitore, il razionalista di ogni epoca, sia antico che moderno, ha insistito sulla necessità della formalizzazione, all'inseguimento del mito dell'assolutezza *incondizionata* delle proprie dimostrazioni. La scoperta di Russell distruggeva d'incanto una simile impostazione. Esiste una radice *sintattica* puramente formale delle antinomie, legata alla nozione predicativa di appartenenza $\in$, sia essa definita su insiemi o su classi e la sua soluzione consiste nell'abbandonare il mito illuminista delle *verità assolute* nella scienza, senza per questo cadere nel relativismo o nel nihilismo.

La (non-)soluzione di Russell attraverso la sua «teoria dei tipi»

Ma allora, se le antinomie non nascono dalla semantica soltanto, da dove nascono?

La vera questione, semmai, è un'altra: ma se le antinomie non nascono né dalla particolarità di alcune nozioni matematiche come quella d'insieme o di classe, né dall'uso di particolari espressioni semantiche, dov'è la loro origine? Se le antinomie hanno un'indubbia radice sintattica e non solo semantica, se hanno un'indubbia radice formale e non solo contenutistica, in cosa consiste questa radice? Ha forse origine in qualche anomalia dell'uso linguistico negli stessi linguaggi formali che è sempre sfuggita, ma potrebbe essere svelata e quindi evitata?

La risposta sulla struttura sintattica, logico–formale, di ogni antinomia la daranno i teoremi di Gödel

La risposta definitiva a tale questione, almeno per una logica e una matematica che accetta di considerare l' $\in$ dell'appartenenza a classi/insiemi come un primitivo — ed una risposta negativa! —verrà data solo nel secolo seguente, a partire dal 1931 e dai *Teoremi d'Incompletezza* dell'aritmetica formalizzata di Peano (Cfr. nota 13), ad opera del matematico austriaco Kurt Gödel. Una dimostrazione estesa, dai susseguenti *Teoremi di Limitazione* di Turing e di Tarski, a tutti i sistemi formali, nella misura in cui si usano *metodi finitari* di prova degli enunciati. Quei metodi, cioè, che a differenza dei *metodi infinitari* basati sull'evidenza e/o sul riferimento a qualche forma di «intuizione intellettuale», perché le dimostrazioni

[36] Più dubbia è l'attribuzione tradizionale ad Epimenide (VI sec.) di tale antinomia, basandosi anche sulla citazione biblica, paolina, della medesima, nella *Lettera a Tito,* 1,12. Molto più probabile è l'attribuzione fatta da Diogene Laerzio a Eubulide, uno dei fondatori della scuola megarica (IV sec.), contemporaneo di Aristotele.

dipendono esclusivamente da ciò che è stato *esplicitato* negli assiomi e regole di inferenza, garantiscono *universale certezza* alle inferenze (cfr. § **1.6.1**). Torneremo nel **Capitolo 3** sulla questione dei fondamenti insiemistici della logica e della matematica che ha nei *Teoremi di Incompletezza di Gödel* il suo capitolo decisivo e in qualche modo definitivo.

L'emergere della Teoria delle Categorie come metalinguaggio della logica e della matematica

Allo stesso tempo vedremo in quel capitolo l'emergere delle nuove prospettive per la logica, tanto matematica quanto filosofica, aperte dalla logica algebrica *relazionale* della *Teoria delle Categorie,* basata sul rifiuto di considerare lo ∈ dell'appartenenza insiemistica come un *primitivo* del linguaggio formalizzato della logica e della matematica moderne.

Il superamento del carattere incondizionato della meccanica newtoniana nella «nuova fisica»

Prima però di accennare a quest'ultima tappa della questione sui fondamenti della matematica e della logica moderne, è bene offrire una sommaria sintesi delle scoperte rivoluzionarie che nel frattempo si determinano nella scienza fisica fra la fine dell'800 e i primi trent'anni del '900 e che hanno indotto a parlare di «nuova fisica» al riguardo. Ultimamente, si tratterà dell'estensione del *metodo ipotetico-deduttivo* anche alle scienze fisiche, contro la presunta apodditticità incondizionata della Meccanica Newtoniana supposta dall'Illuminismo agli inizi della modernità. Sarà questo l'oggetto del prossimo capitolo. Da essa, alla fine e non casualmente, emergerà l'utilità di usare la *Teoria delle Categorie* anche nella formalizzazione logica e matematica delle teorie fisiche.

1.7 Sommario del Primo Capitolo

La separazione fra filosofia della natura e scienze della natura grazie al metodo matematico-sperimentale di Galilei e al calcolo integrale di Newton-Leibniz

In questo primo capitolo abbiamo fornito un breve *excursus* storico sulla nascita della scienza moderna, sul suo sviluppo fino alla fine del XIX secolo e sull'influenza che questi eventi hanno avuto sull'antica filosofia della natura. Nel § **1.1** abbiamo illustrato brevemente la nascita del pensiero scientifico moderno nei secoli XVI-XVII come ripresa su nuove basi epistemologiche dell'approccio fisico–matematico greco allo studio della natura. L'inizio della scienza moderna coinciderà in particolare con lo sviluppo del *nuovo metodo matematico–sperimentale* di Galilei (la natura non va contemplata, ma interrogata mediante le nostre ipotesi matematiche di spiegazione) e *la nascita del calcolo infinitesimale* ad opera di Newton e Leibniz, con la soluzione del problema della quadratura delle curve, problema sul quale si era fermato lo sviluppo dell'approccio greco allo studio fisico–matematico della natura.

L'eclissi moderna della filosofia della natura e lo scientismo

In § **1.2** abbiamo ricordato l'eclisse moderna della filosofia della natura a causa dell'errata interpretazione della scienza moderna come una nuova metafisica dell'ente naturale. Come, cioè, una nuova filosofia della natura e non come qualcosa di profondamente distinto. Di qui l'affermarsi dello *scientismo* nelle sue varie forme, illuminista e positivista in particolare.

La filosofia della natura hegeliana e le "due culture"

In § **1.3** abbiamo accennato brevemente alla meteora della filosofia della natura di stampo hegeliano ed al suo ruolo per la nascita delle *scienze dell'uomo* come distinte dalle *scienze della natura* e la conseguente separazione assoluta fra le *due culture*

L'apogeo dello scientismo illuminista e la negazione della metafisica naturale nel pensiero kantiano basato sulla presunta apoditticità del pensiero matematico basato sull'evidenza

In § **1.4** abbiamo cercato di individuare quali erano le radici dello *scientismo illuminista* che, contrapposto al *razionalismo filosofico*, ha portato a quell'esiziale contrapposizione ideologica fra le «due culture», scientifica e umanista, di cui ancora paghiamo le conseguenze. Dapprima in § 1.4.1 abbiamo ricordato brevemente come l'apogeo scientifico del programma illuminista è stato raggiunto con l'assiomatizzazione dell'analisi matematica e del concetto di limite tra la fine del sec. XVIII e la prima metà del secolo XIX. Quindi in § 1.4.2 abbiamo individuato la radice dell'ideologia scientista moderna nella pretesa di costruire una scienza naturale sulla presunta *autoevidenza* delle leggi della dinamica newtoniana, sul modello dei postulati della geometria euclidea. Tipico esempio di tale ideologia è stata l'ipotesi di *determinismo meccanicista assoluto dell'universo fisico,* contenuta nell'opera di Laplace e l'esaltazione della fisica newtoniana come «scienza assoluta». Ovvero, come forma di sapere *incondizionato* o *apodittico* (= la coerenza della dimostrazione, legata alla verità degli assiomi) e non *ipotetico* (= la coerenza della dimostrazione indipendente dalla verità degli assiomi), sostitutivo della metafisica e della filosofia in generale. Di qui la nascita del programma della filosofia critica kantiana come programma di giustificazione dell'universalità e della necessità della matematica e della fisica «pure». Esse sono per Kant basate, non sulla presunta conoscibilità della natura delle cose, ma sull'assolutezza autoevidente dei principi formali della scienza matematica e fisica, prodotto dell'autocoscienza, dell'«Io trascendentale» meta–soggettivo. Alle due scienze regine si contrappone così, secondo Kant, la contraddittorietà e la sterilità della metafisica tradizionale, vista ormai soltanto come infondato dogmatismo. Ma, come in ogni parabola storica, l'apogeo dell'esaltazione illuminista della scienza moderna, segna anche l'inizio del suo declino, legato alla cosiddetta «crisi dei fondamenti», innanzitutto della base matematica ed epistemologica della scienza moderna: la geometria e l'analisi matematica.

La crisi dell'apoditticità del pensiero matematico a partire dalla nascita delle geometrie non-euclidee

In § **1.5** abbiamo perciò esaminato con una certa ampiezza l'evento della *crisi dei fondamenti della matematica* nel secolo XIX. La disfatta del mito scientista comincia con la scoperta delle *geometrie non-euclidee* e l'assiomatizzazione della matematica, con la conseguente accettazione del *carattere ipotetico* e non incondizionato o apodittico delle teorie scientifiche. Il primo passo sarà la nascita delle geometrie non–euclidee di Bolyai e Lobacevskji. Da questo momento, stante l'ipoteticità delle matematiche, l'evidenza cessa di essere considerata fondamento dell'ormai presunta verità assoluta dei postulati della matematica, mettendo in crisi il paradigma kantiano. La generalizzazione dell'approccio alle nuove geometrie non-euclidee si ha nella prima assiomatizzazione della geometria ad opera di B. Riemann. Riemann fornisce, infine, un modello euclideo della sua geometria ellittica, come geometria dello spazio curvo — esteso da Beltrami alla geometria iperbolica di Lobacevskji —, fornendo insieme, un modello unificato, quasi intuitivo, delle nuove geometrie ed insieme una *prova indiretta della loro consistenza*, che risultava così equivalente a quella della geometria euclidea.

La conseguente questione sui Fondamenti della Matematica e la nascita della Teoria degli Insiemi di Cantor

Il profondo rivolgimento delle convinzioni che avevano guidato per millenni i matematici, portarono perciò alla necessità di una riflessione approfondita sui fondamenti della matematica, in particolare della *consistenza* delle teorie matematiche, dato che non si poteva più supporre la verità incondizionata degli assiomi. Di qui, la necessità di trovare quello che Hilbert definirà un *metalinguaggio* con cui provare la consistenza dei linguaggi matematici, individuato da Weierstrass in poi con *la teoria degli insiemi.* In tale sforzo sistematico, ci si è imbattuti nel problema delle antinomie (Cfr. §**1.6**). Per primo fu G. Cantor (Cfr. §**1.6.1**), nella sua teoria non–assiomatica degli insiemi, ad imbattersi nell'antinomicità di nozioni onnicomprensive circa gli oggetti di una teoria come l'*insieme universale* o l'*insieme massimale*.

La scoperta delle antinomie, il carattere necessariamente ipotetico delle matematiche legato al metodo assiomatico

Di ben maggiore risonanza culturale fu la scoperta da parte di B. Russell (Cfr. § **1.6.2**) di un'analoga antinomia (l'antinomia della *classe totale*) nel tentativo *logicista* di G. Frege di costruire una teoria dei fondamenti della matematica basata sulla nozione logica di *classe*, come dominio di predicati, e non d'insieme. La gravità della scoperta era legata al fatto che l'antinomia era di tipo *logico* e non solo matematico (valeva in qualsiasi logica dei predicati, matematica o no), ma soprattutto era di tipo *sintattico* e non semantico. Era basata cioè sulla nozione sintattica di «appartenenza» ∈ (che vale sia in teoria degli insiemi che delle classi) e non su quella semantica di «verità», come lo erano invece le altre antinomie logiche note nella storia del pensiero occidentale, a partire dalla famosa «antinomia del mentitore» del pensiero greco scoperta dai Sofisti.

Bibliografia del Primo Capitolo

Basti, G. (1966). Per una lettura tomista dei fondamenti della matematica. In G. Basti, & A. L. Perrone, *Le radici forti del pensiero debole. Dalla metafisica, alla matematica al calcolo* (pp. 20-254). Roma-Padova: Pontificia Università Lateranse - Il Poligrafo.

Boyer, C. B. (1982). *Storia della matematica.* Milano: Mondadori.

Burali-Forti, C. (1897). Una questione sui numeri transfiniti. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 11*, 154-164.

Cantor, G. (1874). Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, 77*, 258-262.

Cantor, G. (1891). Ueber eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre. *Jahresber. Deutsch. Mathem.-Verein., 1*, 75-78.

Cantor, G. (1932). Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten I, II (1887-88). In G. Cantor, & E. Zermelo (Ed.), *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts. Zweite Ausgabe (1980)* (pp. 378-439). Berlin-New York: Springer.

Cassirer, E. (1978). *Storia della filosofia moderna, 4 vv.* Torino: Einaudi.

Chiavarini, G. (2021). *La simbolica dell'infinito tra matematica, filosofia e teologia in P. A. Florenskij. Tesi dottorale alla Pontificia Università Lateranense.* Roma: In stampa.

Cohen, P. J. (1966). *Set theory and the continuum hypothesis.* New York : Benjamin Publ.

Da Costa, N. C. (2011). Gödel's incompleteness theorems and physics. *Principia, 15*(3), 453-459.

Drake, S. (2009). *Gaileo Galilei, pioniere della scienza.* Padova: Muzzio.

Enriques, F. (1898). *Lezioni di geometria proiettiva.* Bologna: Zanichelli.

Florenskij, P. A. (2012). *La colonna e il fondamento della verità. Saggio di teodicea ortodossa in dodici lettere.* Sesto San Giovanni: 2012.

Florenskij, P. A. (2020). *La prospettiva rovesciata.* Milano: Adelphi.

Fraenkel, A. H. (1953). *Abstract Set Theory.* Amsterdam: North Holland Publishing Co.

Fraenkel, A. H. (1966). *Set Theory and Logic.* Upper Sadle River, NJ: Addison-Wesley.

Gödel, K. (1933). Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie. *Ergebn. eines mathemat. Kolloq., 4*, 34-38.

Gödel, K. (1954). J. W. Gibbes Lecture. In H. Wang, *From mathematics to philosophy* (pp. 324-325). London, UK: Humanity Press, 1974.

Gödel, K. (1964). What is Cantor continuum problem. In P. Benacerraf, & H. Putnam, *Philosophy of mathematics* (pp. 258-273). Upper Sadle River, NJ: Prentice Hall Publ.

Hallett, M. (1996). *Cantorian set theory and limitation of size.* Oxford UK: Clarendon Press.

Heidegger, M. (1927). *Essere e Tempo.* (F. Volpi, Ed.) Milano: Longanesi, 2005.

Heidegger, M. (1954). *Sentieri interrotti.* Firenze: La Nuova Italia, 1968.

Hilbert, D. (1899). *Grundlagen der Geometrie.* Leipzig: Teubner Verlag.

Husserl, E. (1929). *Formale und Transzendentale Logik.* (P. Janssen, A cura di) Den Haag: Nijhoff, 1974.

Koyré, A. (1961). *Dal mondo del pressapoco all'universo della precisione.* Torino: Einaudi.

Lombardo-Radice, L. (2014). *L'infinito. Itinerari filosofici e matematici di un concetto di base. Seconda Edizione.* Roma: Editori Riuniti.

Nagel, E., & Newmann, J. R. (1993). *La prova di Gödel.* Torino: Bollati-Boringhieri.

Nelson, E. (1977). Internal set theory. A new approach to nonstandard analysis. *Bull. Am. Math. Soc., 83*, 1165-1698.

Nelson, E. (2002, January 7). *Sintax and semantics.* Retrieved August 20, 2017, from Proceedings of the IRAFS International Conference "Foundations and the Ontological Quest. Prospects for the New Millennium": http://www.irafs.org/irafs_1/cd_irafs02/texts/nelson.pdf

Nelson, E. (2014). *Internal set theory.* Tratto il giorno May 25, 2021 da Edward Nelson's Home page: https://web.math.princeton.edu/~nelson/books/1.pdf

Polanyi, M. (1966). *The tacit dimesion.* London: Routledge.

Robinson, A. (1974). *Non-standard analysis. Second edition.* Princeton, NJ: Princeton UP.

Ruelle, D. (1984). Determinismo e predicibilità. In G. Casati (Ed.), *Il caos. Le leggi del disordine* (pp. 3-21). Milano: Le Scienze.

Suppes, P. (1972). *Axiomatic set theory.* New York: Dover Publications.

Toth, I. (1997). *Aristotele e i fondamenti assiomatici della geometria. Prolegomeni alla comprensione dei frammenti non–euclidei del «Corpus Aristotelicum»*. Milano: Vita e Pensiero.

Zermelo, E. (1908). Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre: I. *Math. Annalen, 65*, 261-281.